Y100 matematiikka
Luentokuulustelu 22.2.2006
Malliratkaisuja

1. Etsi funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3$$

ääriarvokohdat. Missä funktio on kasvava, missä vähenevä?

Ratkaisu. Polynomifunktio f on kaikkialla jatkuva ja derivoituva. Funktion derivaatta kuvaa sen kulkua. Derivoidaan funktio:

$$f'(x) = -2x^3 - 4x^2 = -2x^2(x+2).$$

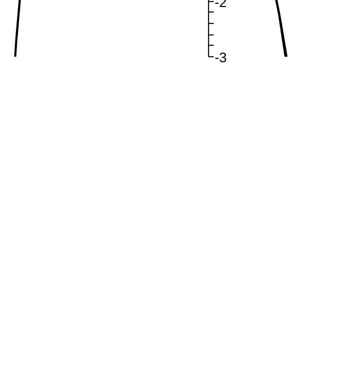
Derivaatan nollakohdat ovat tulon nollasäännön mukaan $x = 0$ ja $x = -2$. Koska derivaatta on jatkuva, se voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Lasketaan muutamia derivaatan arvoja ja piirretään niiden mukaan merkkikaavio.

$$\begin{aligned} f'(-3) &= -2(-3)^2(-3+2) = 18, \\ f'(-1) &= -2(-1)^2(-1+2) = -2, \\ f'(1) &= -2 \cdot 1^2(1+2) = -6. \end{aligned}$$

Funktio on vähenevä siellä, missä derivaatta on negatiivinen, ja kasvava siellä, missä derivaatta on positiivinen.

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Kaaviosta voidaan päätellä, että funktio on kasvava, kun $x < -2$, ja vähenevä, kun $x > -2$. Funktiolla on siis maksimi kohdassa $x = -2$, ja muita ääriarvokohtia ei ole.



2. Laske funktion $f(x) = x^2$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä ala välillä $-1 \leq x \leq 1$. Laske lisäksi funktion f ja funktion $g(x) = x^4$ kuvaajien väliin jäävä ala samalla välillä.

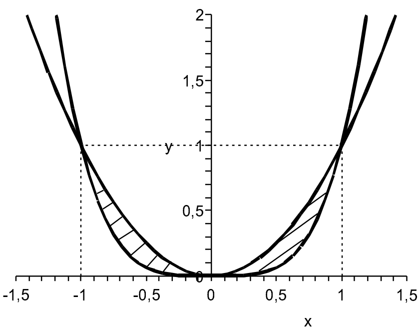
   Ratkaisu. Funktio f on aina epänegatiivinen. Siispä sen kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä ala on määrätty integraali

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}(-1)^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

   Funktio g on samaten kaikkialla epänegatiivinen. Lisäksi, kun $-1 \leq x \leq 1$, pätee $g(x) \leq f(x)$. Kuvaajien väliin jäävä pinta-ala saadaan siis vähentämällä f:n kuvaajan alle jäävästä alasta g:n kuvaajan alle jäävä ala. Jälkimmäinen puolestaan on määrätty integraali

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{5}x^5 = \frac{1}{5}\cdot 1^5 - \frac{1}{5}(-1)^5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

   Kuvaajien väliin jäävä ala on siis $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.



3. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' = 4y(x+2), \qquad y(-1) = 3.$$

   Ratkaisu. Funktio $y(x) = 0$ toteuttaa yhtälön, mutta alkuarvosta nähdään, että se ei ole oikea ratkaisu. Tällöin $y \neq 0$, joten yhtälö voidaan jakaa y:llä, jolloin nähdään, että se on separoituva:

$$\frac{1}{y}y' = 4(x+2).$$

Nyt voidaan etsiä molemmille puolille integraalifunktiot. Vasemman puolen eräs integraalifunktio on

$$\int \frac{1}{y}y'\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| = \ln y.$$

Alkuarvosta nähdään, että $y > 0$, joten itseisarvot voidaan jättää pois. Oikean puolen eräs integraalifunktio on

$$\int 4(x+2)\,dx = \int 4x + 8\,dx = 2x^2 + 8x.$$

Integraalifunktioiden on oltava samat, lukuunottamatta mahdollista vakion lisäystä. Näin saadaan

$$\begin{aligned} & \ln y = 2x^2 + 8x + C \\ \Longleftrightarrow\ & y = e^{2x^2+8x+C} \\ \Longleftrightarrow\ & y = e^C e^{2x^2+8x} \\ \Longleftrightarrow\ & y = ke^{2x^2+8x}. \end{aligned}$$

Tässä on merkitty $k = e^C$.

Alkuarvoehdon mukaan

$$y(-1) = ke^{2(-1)^2+8(-1)} = ke^{-6} = 3,$$

joten $k = 3e^6$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$y(x) = 3e^6 e^{2x^2+8x} = 3e^{2x^2+8x+6} = 3e^{2(x+3)(x+1)}.$$

4.a) Paraabelin yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$. Ratkaise kertoimet a, b ja c, kun tiedetään, että paraabeli kulkee pisteiden $(1,0)$, $(2,-1)$ ja $(3,-6)$ kautta.

Ratkaisu. Sijoittamalla pisteen $(1,0)$ koordinaatit paraabelin yhtälöön saadaan

$$0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \quad \text{eli} \quad a + b + c = 0.$$

Sijoittamalla muiden pisteiden koordinaatit saadaan samalla tavoin

$$-1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad \text{eli} \quad 4a + 2b + c = -1,$$

ja

$$-6 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \quad \text{eli} \quad 9a + 3b + c = -6.$$

Ratkaistaan näin saatu kolmen yhtälön yhtälöryhmä eliminointimenetelmällä:

$$\begin{cases} a & +b & +c & = & 0 & | \cdot (-4) & | \cdot (-9) \\ 4a & +2b & +c & = & -1 & | \leftarrow & | \\ 9a & +3b & +c & = & -6 & & | \leftarrow \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & +b & +c & = & 0 \\ & -2b & -3c & = & -1 & | : (-2) \\ & -6b & -8c & = & -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & +b & +c & = & 0 & | \leftarrow \\ & b & +\frac{3}{2}c & = & \frac{1}{2} & | \cdot (-1) & | \cdot 6 \\ & -6b & -8c & = & -6 & & | \leftarrow \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & & -\frac{1}{2}c & = & -\frac{1}{2} & | \leftarrow \\ & b & +\frac{3}{2}c & = & \frac{1}{2} & | & | \leftarrow \\ & & c & = & -3 & | \cdot \frac{1}{2} & | \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & & & = & -2 \\ & b & & = & 5 \\ & & c & = & -3 \end{cases}$$

Paraabelin yhtälö on siis $y = -2x^2 + 5x - 3$.

4.b) Osoita kertolaskulla, että matriisit

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 8 & 6 & -1 \\ -12 & -9 & 2 \end{bmatrix}$$

ovat toistensa käänteismatriiseja. Ratkaise tämän tiedon avulla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x & -y & +z & = & 1 \\ -4x & +2y & -z & = & 1 \\ & 3y & +2z & = & 1 \end{cases}$$

Ratkaisu. Kerrotaan matriisit keskenään:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 8 & 6 & -1 \\ -12 & -9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 7 - 1 \cdot 8 + 1 \cdot (-12) & 3 \cdot 5 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-9) & 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ -4 \cdot 7 + 2 \cdot 8 - 1 \cdot (-12) & -4 \cdot 5 + 2 \cdot 6 - 1 \cdot (-9) & -4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot (-12) & 0 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-9) & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koska tuloksena on yksikkömatriisi, ovat matriisit toistensa käänteismatriiseja.

Jos säännöllinen matriisi A sisältää yhtälöryhmän kertoimet ja vektori $\bar{b}$ vakiotekijät, on ratkaisuvektori $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$. Ensimmäinen matriisi sisältää yhtälöryhmän kertoimet, joten ratkaisu saadaan kertomalla vakiovektori $(1, 1, 1)$ käänteismatriisilla:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 8 & 6 & -1 \\ -12 & -9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -12 \cdot 1 - 9 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix}.$$