Y100 matematiikka
Luentokuulustelu 17.1.2006
Malliratkaisuja

1. Pahvista rakennetaan suorakulmainen neliöpohjainen laatikko. Laatikossa ei ole kantta, eli se on päältä avoin. Laatikon tilavuudeksi on määrätty 4 litraa. Määrää laatikon mitat (korkeus ja pohjan leveys) siten, että pahvia kuluu mahdollisimman pieni määrä.

   Ratkaisu. Merkitään laatikon pohjan leveyttä x:llä ja korkeutta h:lla. Tällöin laatikon tilavuus on $V = x^2h$. Koska tilavuudeksi on määrätty 4 litraa, saadaan seuraava yhtälö:

$$x^2h = 4.$$

Tästä ratkaistuna korkeus on $h = 4/x^2$.

Laatikkoon tarvittava pahvi kuluu laatikon sivuihin sekä pohjaan. Näiden yhteenlaskettu ala on $A = 4xh + x^2$. Sijoittamalla tähän yhtälöön aikaisemmasta ratkaistu korkeus saadaan

$$A(x) = 4x \cdot \frac{4}{x^2} + x^2 = \frac{16}{x} + x^2.$$

Tämä on funktio, jonka pienintä arvoa etsitään. Se on määritelty, kun $0 < x < \infty$.

Funktion pienin arvo saattaa löytyä sen derivaatan nollakohdasta. Derivoidaan funktio:

$$A'(x) = D\ (16x^{-1} + x^2) = 16 \cdot (-1)x^{-2} + 2x = -\frac{16}{x^2} + 2x.$$

Etsitään sitten derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\iff -\frac{16}{x^2} + 2x = 0 \\ &\iff 2x = \frac{16}{x^2} \quad \mid \cdot x^2 \\ &\iff 2x^3 = 16 \quad \mid : 2 \\ &\iff x^3 = 8 \quad \mid \sqrt[3]{} \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

Ainoa nollakohta on $x = 2$. Derivaatta on jatkuva, kun $0 < x < \infty$, joten se voi muuttaa merkkiään vain nollakohdassa. Lisäksi saadaan helposti laskemalla $A'(1) = -14$ ja $A'(4) = 7$. Piirretään merkkikaavio:

	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Merkkikaaviosta nähdään, että funktio on vähenevä, kun $x < 2$, ja kasvava, kun $x > 2$. Siispä pienin arvo saavutetaan, kun $x = 2$ (dm). Tällöin $h = 1$ (dm).

2. Laske integraalit

$$\int x^4 + 3x^2 - x\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Laske lisäksi x-akselin ja funktion $f(x) = \sin x$ kuvaajan väliin jäävä ala välillä $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

Ratkaisu. Integraaleista ensimmäinen tarkoittaa vain integraalifunktion määrittämistä:

$$\int x^4 + 3x^2 - x\,dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}\cdot 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C,$$

missä C on mielivaltainen (integroimis)vakio.

Jälkimmäinen integraali on

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \Big/_{1}^{2} \ln|x| = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln 2 \ (\approx 0{,}693).$$

Funktion $f(x) \sin x$ nollakohdat ovat $n \cdot \frac{\pi}{2}$, missä n on kokonaisluku. Funktio on negatiivinen, kun $-\pi/2 < x < 0$ ja positiivinen, kun $0 < x < \pi/2$. Pinta-ala on siis laskettava kahdessa osassa. Negatiivisella puolella pinta-ala on integraalin vastaluku:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx = -\Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\cos x = -\Big(-\cos 0 - \Big(-\cos\frac{\pi}{2}\Big)\Big) \\ &= \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Positiivisella puolella pinta-ala on integraali sellaisenaan:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} -\cos x = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \\ &= -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = -0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Kokonaispinta-ala on näiden osien summa, eli $A = A_1 + A_2 = 2$.

3.a) Ainetta strontium-83 on alussa 40 kiloa ja 2,7 vuorokauden kuluttua 10 kiloa. Ratkaise strontiumin määrä ajan funktiona (alussa aikaa on kulunut 0 vuorokautta), kun aineen hajoamisnopeus on suoraan verrannollinen sen määrään.

Ratkaisu. Merkitään strontiumin määrää ajan funktiona $m(t)$. Hajoamisnopeus on määrän muuttumisen nopeus, eli määrän derivaatta $m'(t)$. Koska hajoamisnopeus on suoraan verrannollinen määrään, saadaan differentiaaliyhtälö

$$m'(t) = km(t),$$

missä k on verrannollisuuskerroin. Erillisratkaisu $m(t) = 0$ kaikilla t ei kelpaa, sillä esim. $m(0) = 40 \neq 0$. Differentiaaliyhtälö saadaan siis separoituun muotoon jakamalla se puolittain m:llä

$$\frac{m'}{m} = k.$$

Merkitään $g(m) = 1/m$ ja $h(t) = k$. Näiden (eräät) integraalifunktiot ovat $G(m) = \ln|m|$ ja $H(t) = kt$. Itseisarvomerkit voidaan jättää pois, koska määrä on aina positiivinen. Ratkaisuksi saadaan siis

$$\ln m = kt + C \iff m = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C} = m_0 e^{kt},$$

missä on merkitty $m_0 = e^C$.

Alkuehdosta saadaan

$$m(0) = m_0 e^0 = 40 \iff m_0 \cdot 1 = 40,$$

eli $m_0 = 40$. Toisaalta tiedetään, että $m(2{,}7) = 10$, joten

$$\begin{aligned} m(2{,}7) = &40e^{k\cdot 2{,}7} = 10 \quad | : 40 \\ \iff &e^{k\cdot 2{,}7} = 0{,}25 \quad | \ln \\ \iff &k \cdot 2{,}7 = \ln 0{,}25 \quad | : 2{,}7 \\ \iff &k = \frac{\ln 0{,}25}{2{,}7} \approx -0{,}513. \end{aligned}$$

Strontiumin määrää ajan funktiona kuvaa siis funktio

$$m(t) = 40e^{-0{,}513t} = 40 \cdot 0{,}598^t.$$

3.b) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$2yy' = 2x - 4$$

alkuarvoehdolla $y(2) = 0$.

Ratkaisu. Differentiaaliyhtälö on separoituva. Merkitään $g(y) = 2y$ ja $h(x) = 2x - 4$. Näillä on integraalifunktiot $G(y) = y^2$ ja $H(x) = x^2 - 4x$. Saadaan siis

$$y^2 = x^2 - 4x + C,$$

josta $y = \pm\sqrt{x^2 - 4x + C}$. Alkuarvoehdon avulla voidaan ratkaista C:

$$\begin{aligned} & y(2) = \pm\sqrt{2^2 - 4\cdot 2 + C} = 0 \\ \iff & \pm\sqrt{C-4} = 0 \\ \iff & C = 4. \end{aligned}$$

Näin saadaan

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \pm\sqrt{(x-2)^2} = \pm|x-2|.$$

Tässä on nyt huomattava, että + tai − täytyy valita erikseen jokaisella x siten, että funktiosta y tulee derivoituva. Esimerkiksi $y(x) = |x-2|$ ei ole derivoituva kohdassa $x = 2$. Ainoat mahdollisuudet ratkaisuiksi ovat

$$y_1(x) = x - 2 \quad \text{ja} \quad y_2(x) = -x + 2,$$

missä siis on valittu lausekkeelle $\pm|x-2|$ eri merkit pisteen $x = 2$ eri puolilla. Koska tällaisia tapauksia ei ollut käsitelty luennoilla, vastaukseksi riitti esim. $y(x) = \pm|x-2|$ tai $y(x) = \pm(x-2)$ ilman perusteluja tai jokin vähemmän sievennetty muoto. Kuitenkin, jos $\pm$ oli kokonaan unohtunut, menetti pisteen.

4.a) Tarkastellaan matriiseja

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Millä a:n arvolla vektorit $\bar{x}$ ja $T\bar{x}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Ratkaisu. Lasketaan ensin vektori $T\bar{x}$:

$$T\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ a\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ a \end{bmatrix}.$$

Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Lasketaan vektorien pistetulo:

$$\bar{x}\cdot T\bar{x} = (1,1)\cdot(2,a) = 1\cdot 2 + 1\cdot a = 2 + a.$$

Pistetulo on nolla, kun $a = -2$. Tällöin vektorit ovat kohtisuorassa.

4.b) Ratkaise seuraava yhtälöryhmä:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & x_2 & -x_3 & = & 5 \end{array} \right. .$$

Ratkaisu. Käytetään Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmää:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 & |\cdot(-2) & |\cdot 2 \\ 2x_1 & x_2 & -3x_3 & = & 1 & |\leftarrow & | \\ -2x_1 & x_2 & -x_3 & = & 5 & & |\leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 & \\ & 3x_2 & -7x_3 & = & 3 & |:3 \\ & -x_2 & 3x_3 & = & 3 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 & |\leftarrow & \\ & x_2 & -\frac{7}{3}x_3 & = & 1 & |\cdot 1 & |\cdot 1 \\ & -x_2 & 3x_3 & = & 3 & & |\leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & & -\frac{1}{3}x_3 & = & 0 & \\ & x_2 & -\frac{7}{3}x_3 & = & 1 & \\ & & \frac{2}{3}x_3 & = & 4 & |:\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & & +\frac{1}{3}x_3 & = & 0 & |\leftarrow & \\ & x_2 & -\frac{7}{3}x_3 & = & 1 & | & |\leftarrow \\ & & x_3 & = & 6 & |\cdot\frac{1}{3} & |\cdot\frac{7}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & 2 \\ & x_2 & & = & 15 \\ & & x_3 & = & 6 \end{array}\right. .$$