1. Johdanto

Kurssi Y100 jakautuu karkeasti seuraaviin osiin:

- funktioita ja niiden perusominaisuuksia,
- derivointi,
- integrointi,
- differentiaaliyhtälöt,
- matriisilaskenta,
- tietokone matemaattisena työvälineenä.

Pääsääntöisesti kussakin osassa tarvitaan aikaisempien osien tietoja. Listan viimeinen osa-alue, tietokoneavusteinen matematiikka, toteutetaan luentojen ja laskuharjoitusten rinnalla osittain itsenäisenä kokonaisuutena, jonka painotus poikkeaa jonkin verran kurssin muista osista. Tarkoitus on oppia hyödyntämään MS Excel -taulukkolaskentaohjelman laskentaominaisuuksia lähinnä numeerisessa ongelmanratkaisussa sekä tutustua Maple-ohjelmaan tyypillisenä matematiikan yleistyökaluna.

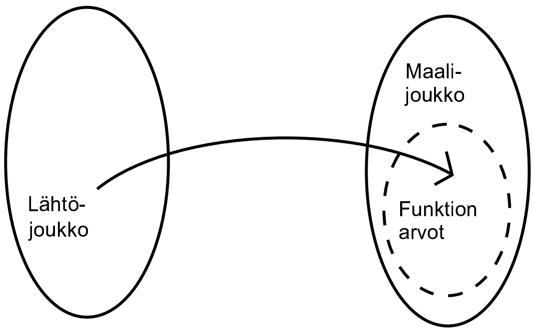
Uusia käsitteitä opittaessa painotetaan sekä käsitteen sisällön omaksumista että siihen liittyviä laskumenetelmiä. Sovellettaessa opittua asiaa täytyy sekä tietää mistä puhutaan että osata suorittaa tarvittavat laskut.

2. Reaaliarvoiset funktiot

2.1. **Funktio.** Funktio on tämän kurssin tärkein käsite. Sen voidaan ajatella kuvaavan jonkin suureen riippuvuutta toisesta. Matemaattisesti funktion määrittelee kokonaan *riippuvuussääntö*, joka voidaan joskus - ei käytännössä läheskään aina - kirjoittaa laskulausekkeena tai ryhmänä laskulausekkeita.

Merkinnässä $f : A \to B$ joukkoa A kutsutaan funktion *lähtö- tai määrittelyjoukoksi* ja joukkoa B funktion *maalijoukoksi*. Funktio f liittää *jokaiseen* joukon A alkioon x *yksikäsitteisen* alkion joukosta B. Merkintä $f(x)$ tarkoittaa sitä maalijoukon alkiota, johon lähtöjoukon alkio x liittyy. Tätä sanotaan *funktion f arvoksi muuttujan arvolla x*.

Huom! Funktion arvojen *ei tarvitse* määritelmän mukaan täyttää maalijoukkoa!



Tällä kurssilla maalijoukko on aina reaalilukujen joukko, jolloin funktiota voidaan kutsua reaaliarvoiseksi. Lähtöjoukko on yleensä jokin reaalilukusuoran osa, avoin tai suljettu väli tai näiden yhdistelmä. Olennaista on, että

i) jokaista lähtöjoukon alkiota vastaa jokin funktion arvo, ja
ii) yhtäkään lähtöjoukon alkiota ei vastaa useampi funktion arvo.

Esimerkki 2.1. Määritellään funktio, joka kuvaa tuotteen tai palvelun markkamääräisen hinnan riippuvuutta hinnasta euroissa - näinhän monet vielä pyrkivät saamaan käsityksen nykyhinnoista. Hinta euroissa voi periaatteessa olla mikä tahansa positiivinen reaaliluku. Funktion määrittelyjoukko on siis $\mathbb{R}_+$ (positiiviset reaaliluvut). Funktion arvo eli hinta markoissa saadaan kertomalla euromääräinen hinta valuuttakurssilla (käytetään vuoden 2002 valuuttakurssia: 1 euro = 5,94573 markkaa) eli $f(x) = 5,94573 \cdot x$. Näemme helposti, että jokainen x saa vain yhden $f(x)$:n arvon, joten funktion yksikäsitteisyys toteutuu. Koska $f(x)$:n kaikki arvot ovat reaalilukuja, voidaan funktion maalijoukoksi määritellä $\mathbb{R}$. Funktio voidaan kokonaisuudessaan merkitä:

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = 5,94573 \cdot x$$

Sovelluksissa funktio kuvaa usein jonkin suureen kehitystä ajan tai paikan mukana. Voidaan esimerkiksi ilmoittaa lämpötila ajan tai paikan funktiona. Toisinaan funktio ilmoittaa abstraktimpia riippuvuuksia, kuten aitauksen pinta-alan käytettävissä olevan aitamateriaalin funktiona. Kun funktiota käsitellään matemaattisesti, ei kuitenkaan ole tärkeää, minkätyyppisestä riippuvuudesta on kysymys.

Esimerkki 2.2. Yksinkertaisin reaaliarvoinen funktio on vakiofunktio. Vakiofunktion tapauksessa funktion arvon $f(x)$ ”riippuvuus” lähtöjoukon alkion arvosta on kenties makuasia, funktion arvo kun on kaikkialla sama. Esim. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ antaa kaikkia lähtöjoukon alkioita (reaalilukuja suljetulla välillä nollasta yhteen) vastaavaksi funktion arvoksi reaaliluvun 2. Vakiofunktio esiintyy usein käytännössä jonkin *paloittain määritellyn funktion* osana. Tällaisia esimerkkejä tulee myöhemmin.

Esimerkki 2.3. Funktioita $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joiden arvot ovat muotoa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kutsutaan *polynomifunktioiksi*. Polynomifunktion arvo saadaan siis laskemalla yhteen lähtöjoukon arvon eriasteisia vakioilla kerrottuja potensseja eli *termejä*. Polynomifunktioita ovat esimerkiksi $P_1(x) = x^2$ ja $P_2(x) = 3x^5 - 2x + 7$. Lukuja a_j kutsutaan polynomin *kertoimiksi*, jotka voivat tietysti olla myös negatiivisia (kuten jälkimmäisen äskeisen esimerkkifunktion toinen kerroin $a_1 = -2$). Suurin n, joka esiintyy x:n potenssissa on polynomin *kertaluku eli aste*. Polynomit ovat helpoimpia käsiteltäviä funkioita, jotka voidaan laskea laskulausekkeesta.

Esimerkki 2.4. Funktiot $R : A \to \mathbb{R}$, joiden arvot voidaan ilmoittaa muodossa $R(x) = P(x)/Q(x)$, missä P ja Q ovat molemmat polynomeja, ovat *rationaalifunkioita*. **Huom!** *Rationaalifunktio ei ole määritelty nimittäjän Q nollakohdissa.* Esimerkiksi funktion $R_1(x) = 1/x$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (reaaliluvut ilman nollaa), ja funktion $R_2(x) = (2x + 3)/(x^2 - 2x)$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Esimerkki 2.5. Funktiota, jonka arvot lasketaan eri osissa lähtöjoukkoa eri lausekkeesta, kutsutaan *paloittain määritellyksi*. Esimerkiksi itseisarvofunktio voidaan määritellä seuraavilla lausekkeilla:

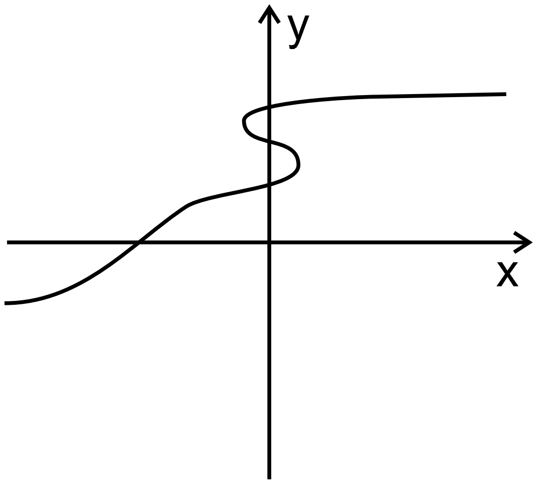
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Jako voi olla monimutkaisempikin, kuten funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

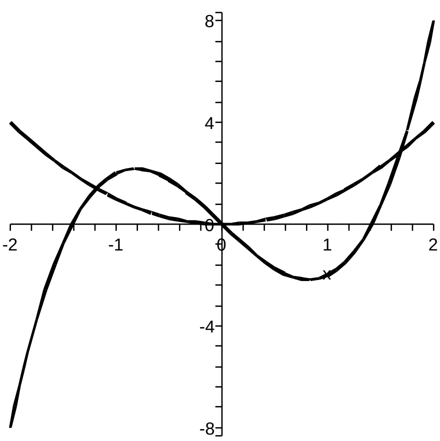
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x \text{ on joku muu kokonaisluku} \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

2.2. **Kuvaaja.** Reaaliarvoinen funktio voidaan usein esittää koordinaatistoon piirretyn kuvaajan eli *graafin* avulla. Tällöin funktion erityispiirteet, kuten kasvunopeus, ääriarvot ja epäjatkuvuuskohdat on helppo hahmottaa. On muistettava, että tarkkakaan piirros ei voi tyhjentävästi kuvata funktion käyttäytymistä, eikä kaikista funktioista edes pystytä piirtämään havainnollistavaa kuvaa. Siksi kuvaajan perusteella ei *koskaan* voi sanoa mitään varmaa funktion arvoista, vaan aina on osattava perustella arvionsa laskien. Kuvaajan piirtäminen on kuitenkin yksi parhaista keinoista oppia ymmärtämään funktion luonnetta.

Kaikki käyrät eivät kuitenkaan kuvaa funktioita. Koska funktion arvojen täytyy olla yksikäsitteisiä, ei yhtä x-arvoa saa vastata kuvaajassa useampia y-arvoja. Jos siis joku pystysuora leikkaa kuvaajaksi väitetyn käyrän useammassa kuin yhdessä kohdassa, kyseessä ei ole reaalifunktion kuvaaja. Funktion kuvaaja ei esimerkiksi voi "laskostua" näin:



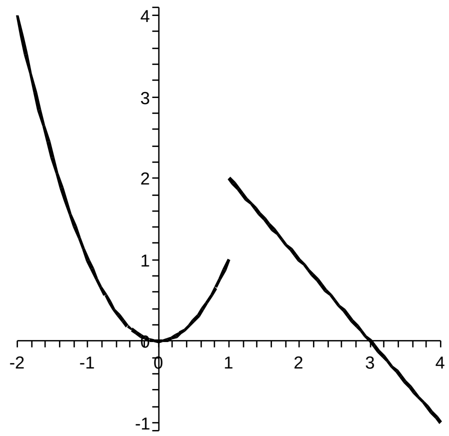
Esimerkki 2.6. Polynomifunktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2x^3 - 4x$ kuvaajat. Kuvan perusteella näyttäisi, että piste $x = 1{,}4$ olisi funktion g nollakohta, mutta oikeasti $g(1{,}4) = -0{,}112$.



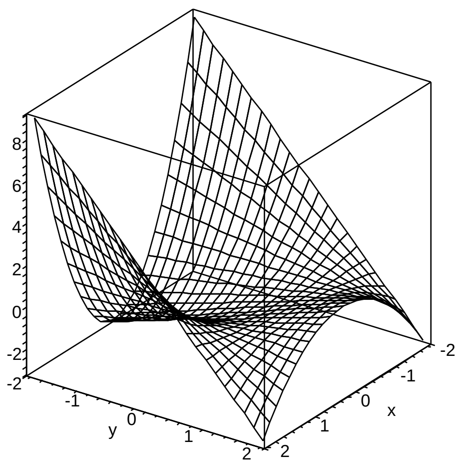
Esimerkki 2.7. Paloittain määritellyn funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 1 \\ -x + 3, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

kuvaaja. Funktiolla on epäjatkuvuuskohta pisteessä $x = 1$. Kuvaajasta ei näe, onko $h(1) = 1$ vai $h(1) = 2$. Funktion lausekkeesta tiedetään, että jälkimmäinen pätee.



Esimerkki 2.8. Funktion $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k(x,y) = (x^2-1)(1-y)$ kuvaaja. Funktion lähtöjoukko on kaksiulotteinen taso. Kuvaaja muodostaa eräänlaisen satulapinnan origon lähistöllä, mutta funktion käyttäytymisestä kauempana origosta ei voi kuvan perusteella sanoa mitään.



3. Raja-arvo ja jatkuvuus

Seuraavaksi tarkastelemme kahta funktioiden keskeistä ominaisuutta, *raja-arvoa* ja *jatkuvuutta* reaalifunktioilla. Käsitteet on varsin helppo hahmottaa, mutta niiden matemaattinen määrittely ja tarkastelu vaatii jonkin verran täsmällisyyttä ja vaivannäköä. Käsitteet ovat kuitenkin aivan olennaisia funktioiden myöhemmässä tutkimisessa mm. derivoimalla.

3.1. **Raja-arvo.** Määrittelemme aluksi *raja-arvon* käsitteen. Sitä käytämme jatkossa määrittelemään muita käsitteitä. Raja-arvo kuvaa funktion käyttäytymistä jonkin pisteen lähistöllä. Graafisesti raja-arvoa voisi kuvata siten, että jos funktion kuvaaja näyttää lähestyvän jotakin arvoa jossakin kohdassa, tämä arvo on funktion raja-arvo kyseisessä kohdassa.

Määritelmä 3.1. Luku a on funktion f *raja-arvo* pisteessä x_0, jos kaikki funktion arvot $f(x)$ sijaitsevat niin lähellä lukua a kuin halutaan, kun valitaan tarkasteltavaksi riittävän lähellä pistettä x_0 sijaitseva alue lähtöjoukosta (siis x:istä). Tällöin merkitään $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

Raja-arvo liittyy siis aina johonkin muuttujan arvoon eikä sitä välttämättä ole olemassa. Esitämme tässä yhden esimerkin määritelmän käytöstä raja-arvon toteamisessa. Yleensä tällä kurssilla riittää raja-arvon käsitteen intuitiivinen ymmärtäminen. On myös olemassa laskusääntöjä, joiden avulla raja-arvon voi päätellä tietyissä tilanteissa.

Esimerkki 3.2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Todistetaan, että $\lim_{x\to 1} = 2$. Olkoon sitä varten y jokin lähellä 2:ta oleva luku, kuitenkin $y \neq 2$. Kun x:n etäisyys pisteestä 1 on pienempi kuin $\frac{1}{2}|y-2|$, niin

$$|f(x) - 2| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2 \cdot \frac{1}{2}|y - 2| = |y - 2|,$$

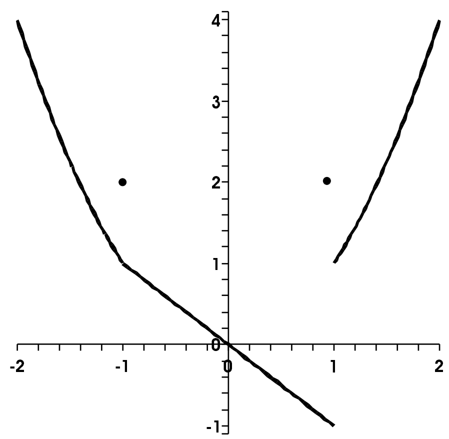
eli $f(x)$ on lähempänä pistettä 2 kuin y. Tämä pätee kaikilla y, joten funktion f raja-arvo pisteessä 1 on 2.

Huom. Täytyy muistaa, ettei funktion *arvo* pisteessä x_0 vaikuta mitenkään funktion *raja-arvoon* pisteessä x_0.

Esimerkki 3.3. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti (ks. kuva):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ 2, & \text{kun } x = -1 \text{ tai } x = 1 \\ -x, & \text{kun } x = -1 < x < 1. \end{cases}$$

Funktiolla ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 1$, sillä tuon pisteen ympärillä funktion arvot ovat kaukana toisistaan, oli x miten lähellä 1:tä tahansa. Sen sijaan funktion raja-arvo pisteessä $x = -1$ on 1, vaikka $f(1) = 2$.



Voidaan myös tutkia, mitä arvoa funktion arvot lähestyvät muuttujan arvojen kasvaessa tai vähetessä rajatta. Tällaista arvoa, jos sellainen löytyy, kutsutaan joskus raja-arvoksi äärettömyydessä, ja merkitään $\lim_{x\to\infty} f(x)$ tai $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Käytännössä seuraavat säännöt helpottavat raja-arvojen toteamista.

1. $\lim_{x\to x_0} c = c$.
2. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.
3. $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

4. Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, niin
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab.$$
Jos lisäksi $b \neq 0$, niin
$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = a/b.$$

Näistä säännöistä seuraa esimerkiksi, että kaikilla polynomeilla P pätee
$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Esimerkki 3.4. Laskettava $\lim_{x\to 2}(-x^2 + 3x - 1)$. Koska kyseessä on polynomifunktio, voidaan raja-arvo laskea suoraan sijoittamalla lausekkeeseen:
$$\lim_{x\to 2}(-x^2 + 3x - 1) = -2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Esimerkki 3.5. Joskus raja-arvoa tarvitaan, kun funktion arvoa ei voida laskea. Rationaalifunktiota $R(x) = (x^2 - x)/(x - 1)$ ei voida määritellä pisteessä $x = 1$, mutta raja-arvo kyseisessä pisteessä määräytyykin ympärillä olevista pisteistä. Kun siis $x \neq 1$, niin
$$R(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x,$$
joten $\lim_{x\to 1} R(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$.

Esimerkki 3.6. Rationaalifunktioiden raja-arvoja äärettömyydessä voidaan laskea supistamalla lauseke termillä x^r, missä r on nimittäjän aste. Tällä tavoin saadaan
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 + 3x}{2x^2 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1 + \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x^2}} = \frac{-1 + 0}{2 + 0} = -\frac{1}{2}.$$
Tässä käytetään hyväksi edellä mainittuja laskusääntöjä. Toisaalta
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^2 - 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{8}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 0}{2 - 0} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}x = \infty.$$
Raja-arvoa ei ole vaan sanotaan, että *funktion arvot kasvavat rajatta.*

3.2. **Jatkuvuus.** Monien yleisten reaalifunktioiden kuvaajat ovat katkeamattomia käyriä. Tällaisilla funktioilla on se ominaisuus, että muuttujan arvon muuttuessa hyvin vähän ("liukuvasti") myös funktion arvo muuttuu vähän eikä tee hyppäystä. Tätä ominaisuutta sanotaan *jatkuvuudeksi.* Luonnossa on paljon esimerkkejä jatkuvista funktioista, kuten huoneen keskilämpötila ajan funktiona. Lukuunottamatta poikkeavia olosuhteita lämpötila ei tee hyppäyksiä ajan kuluessa. Myös polynomifunktiot, rationaalifunktiot sekä juurifunktiot ovat kaikki jatkuvia funktioita. Funktion jatkuvuus voidaan määritellä raja-arvon avulla.

Määritelmä 3.7. Funktio f on *jatkuva pisteessä* x_0, jos
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$
eli funktion raja-arvo pisteessä x_0 on sama kuin funktion arvo kyseisessä pisteessä. Funktio on *jatkuva*, jos se on jatkuva kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä.

Esimerkki 3.8. Aiemmin on todettu, että kaikilla polynomifunktioilla P pätee $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. Siispä kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia. Myös kaikki rationaalifunktiot ovat jatkuvia koko määrittelyjoukossaan.

Esimerkki 3.9. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

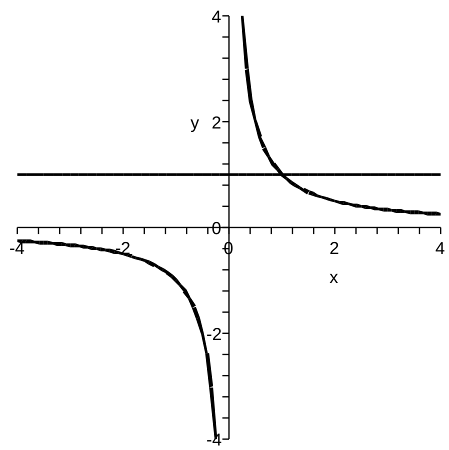
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \neq 1 \\ a, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Funktio f on jatkuva ainakin kaikissa muissa pisteissä paitsi pisteessä $x = 1$. Koska raja-arvo pisteessä $x = 1$ ei riipu funktion arvosta kyseisessä pisteessä, saadaan $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$. Jos nyt $a = 1$, niin funktion arvo pisteessä 1 on sama kuin raja-arvo kyseisessä pisteessä, ja funktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan. Jos $a \neq 1$, piste $x = 1$ on funktion f *epäjatkuvuuskohta.*

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan rationaalifunktioita $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, $g(x) = x/x$. Molemmat funktiot ovat jatkuvia kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä. Funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$, sillä tuota pistettä lähestyttäessä f saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja. Toisaalta

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x/x = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

koska raja-arvoon ei vaikuta se, ettei funktiota ole määritelty kyseisessä pisteessä. Nyt voitaisiin määritellä $g(0) = 1$, jolloin funktio g pysyisi jatkuvana. Toisaalta funktiolle f ei voi määritellä mitään arvoa pisteeseen 0 niin, että f pysyisi jatkuvana, koska f:llä ei ollut lainkaan raja-arvoa tuossa pisteessä.



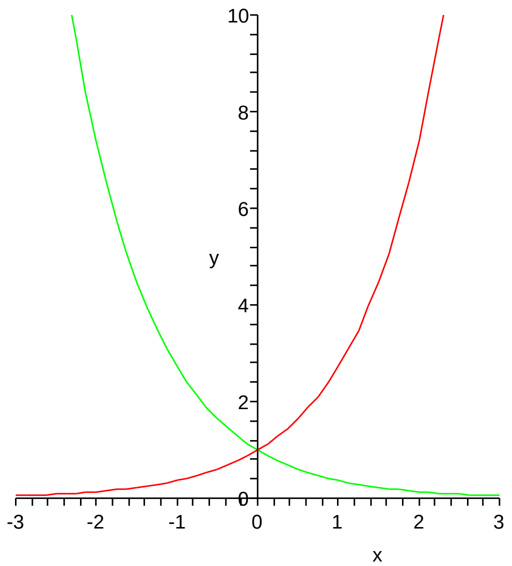
4. Eksponentti- ja logaritmifunktiot

4.1. **Eksponenttifunktio.** Potenssin määritelmää voidaan laajentaa siten, että kokonais- ja murtolukueksponenttien lisäksi voidaan myös korottaa lukuja irrationaalisiin potensseihin. Määritelmän hankaluuden takia emme tätä kuitenkaan kurssilla käytännössä tee, vaan oletamme irrationaaliset potenssit jo määritellyiksi.

Potenssin yleisen määritelmän avulla voimme muodostaa *yleisen eksponenttifunktion*, jonka arvot ovat jonkin positiivisen vakion arvoja korotettuina lähtöjoukon osoittamiin potensseihin.

Määritelmä 4.1. Funktiota $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, exp_a(x) = a^x$, missä a on jokin positiivinen reaalinen vakio, kutsutaan *a-kantaiseksi eksponenttifunktioksi.*

Yleinen eksponenttifunktio on *aidosti kasvava*, jos $a > 1$. Jos $a < 1$, eksponenttifunktio on *aidosti vähenevä*. Nämä asiat voi todeta allaolevasta kuvasta intuitiivisesti. Määrittelemme kasvavuuden ja vähenevyyden kurssin derivointia koskevassa osassa.



Esimerkki 4.2. Eksponenttifunktiolla voidaan usein kuvata sellaista systeemiä, jossa jokin suure saa uuden arvon aina samassa suhteessa edelliseen arvoon tietyssä ajassa. Esim. bakteeriviljelmässä on aluksi 500 000 bakteeria, ja niiden määrä kaksinkertaistuu tunnissa. Muodostetaan funktio $f(x)$, joka kuvaa bakteerien määrää viljelmässä x tunnin päästä. 1 tunnin päästä viljelmässä on $2 \cdot 500000 = 500000 \cdot 2^1 = 1000000$ bakteeria, 2 tunnin päästä $2 \cdot (2 \cdot 500000) = 500000 \cdot 2^2 = 2000000$ bakteeria, 3 tunnin päästä $2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 500000)) = 500000 \cdot 2^3 = 4000000$ bakteeria jne. Yleisesti bakteerien määrä x tunnin kuluttua alusta on $500000 \cdot 2^x$ kappaletta eli

$$f(x) = 500000 \cdot 2^x$$

Potenssien laskusäännöillä voimme johtaa myös eksponenttifunktiolle laskusääntöjä:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $a^{-x} = 1/a^x$

Eksponenttifunktio on kaikkialla jatkuva ja aina aidosti positiivinen. Huomaa, että eksponenttifunktiosta käytetään toisinaan myös määrielmässä esiintynyttä merkintää $exp_a(x)$.

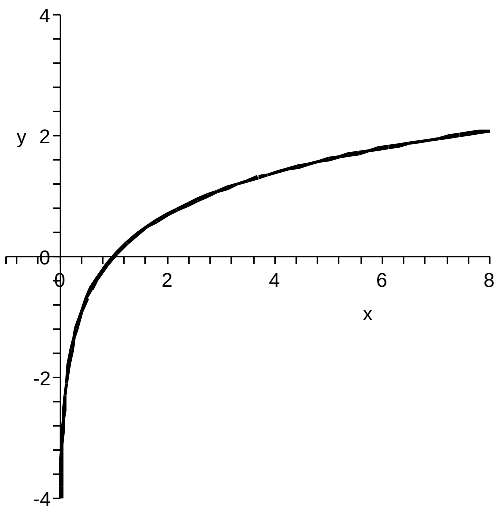
4.2. **Logaritmifunktio.** Logaritmifunktio on eksponenttifunktion *käänteisfunktio.*

Määritelmä 4.3. Voidaan osoittaa, että on olemassa funktio $\log_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$a^{\log_a x} = \log_a a^x = x.$$

Tätä funktiota kutsutaan *a-kantaiseksi logaritmifunktioksi.*

A-kantainen Logaritmi luvusta x kertoo siis, mihin potenssiin a täytyy korottaa, jotta saataisiin x.



Eksponenttifunktion laskusäännöistä voidaan johtaa logaritmin laskusääntöjä.

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a x^y = y \log_a x$
3. $-\log_a x = \log_a(1/x)$

Koska eksponenttifunktio on aina positiivinen, logaritmi on määritelty vain positiivisilla luvuilla. Vastaavasti funktio $f(x) = \log_a(-x)$ on määritelty vain negatiivisilla luvuilla. Nämä funktiot ovat määrittelyjoukossaan kaikkialla jatkuvia.

Joillekin kantaluvuille käytetään tässä yhteydessä omia merkintöjä. Esimerkiksi

$$\log_{10} x = \lg x, \quad \log_e x = \ln x, \quad \log_2 x = \operatorname{lb} x,$$

missä e on irrationaalinen ns. *Neperin luku.* Tähän palaamme kurssin derivaattoja koskevassa osassa.

Esimerkki 4.4. Logaritmi luvusta x kertoo, mihin potenssiin kantaluku täytyy korottaa, jotta saataisiin x. Siispä

$$\log_2 16 = 4, \quad \log_3 9 = 2, \quad \log_5 125 = 3.$$

Lisäksi kaikilla kantaluvuilla a pätee

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{ja} \quad \log_a a = 1.$$

Esimerkki 4.5. Kymmenkantainen logaritmi kertoo suunnilleen, kuinka monta numeroa luvussa on:

$$\lg 10 = 1, \quad \lg 120 \approx 2 \quad \lg 10000 = 4, \quad \lg 987654321 \approx 9.$$

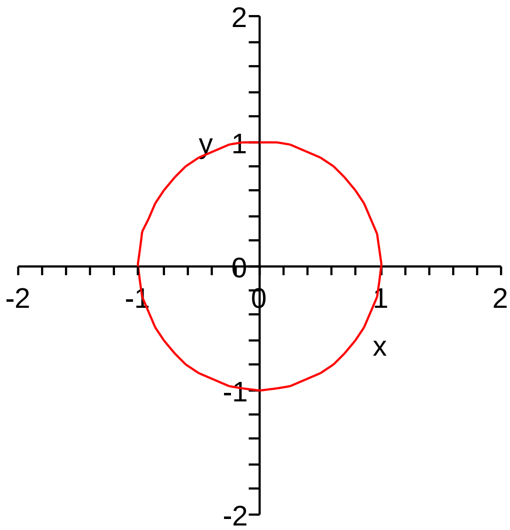
Esimerkki 4.6. Toisinaan on käytännöllistä ilmaista jonkin suureen arvoja logaritmin avulla. Tällöin puhutaan ns. logaritmisesta asteikosta tai *desibeleistä.* Esim. äänen voimakkuutta kuvataan usein äänen intensiteettiin (eli tehoon pinta-alayksikköä kohti) perustuvalla logaritmisella asteikolla.

Äänen voimakkuuden mittaustulokset ilmaistaan tavallisesti ns. logaritmisena intensiteettitasona L, joka lasketaan kaavalla $L = 10 \cdot \lg(I/I_0)$, missä I on mitatun äänen intensiteetti ja I_0 kuulokynnyksen intensiteetin likiarvo $10^{12} W/m^2$. Logaritmisen intensiteettitason yksikkönä on desibeli ja se kertoo logaritmin mitatun intensiteetin ja valitun "nollaintensiteetin"suhteesta.

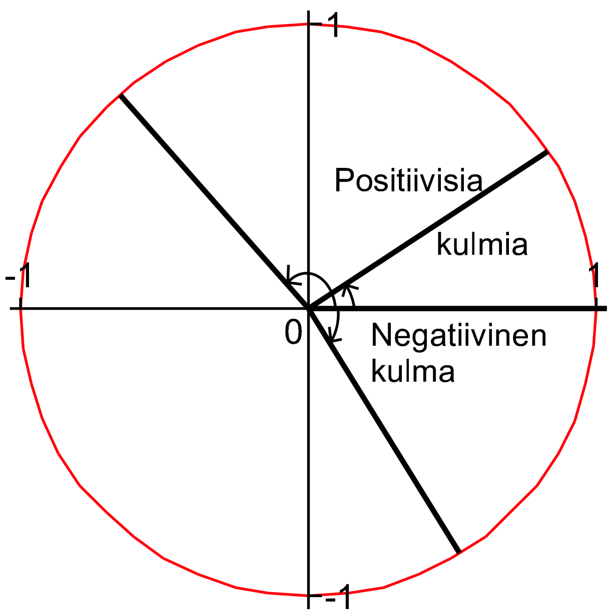
Itse asiassa desibeli ei ole ainoastaan ääneen liittyvä yksikkö. Määritelmällisesti sitä ei ole sidottu mihinkään suureeseen, vaan se merkitsee yleisesti kaavalla $10 \cdot \lg(\frac{x}{x_0})$ laskettua jonkin suureen arvoa, missä x_0 on tarkoitukseen sopivasti valittu mielivalainen nollataso. Tällainen esitysmuoto on järkevä, kun mittaustulokset poikkeavat toisistaan erittäin paljon, jolloin niistä suurimmat ja/tai pienimmät saisivat epämiellyttävän pitkiä numeroarvoja.

5. Trigonometriset funktiot

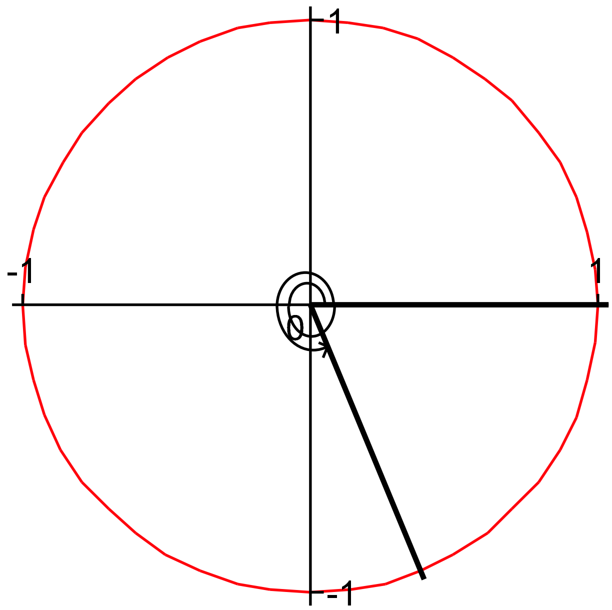
Trigonometriset funktiot sini, kosini ja tangentti määritellään tässä *yksikköympyrän* avulla. Yksikköympyräksi kutsumme 2-ulotteiseen (x,y)-koordinaatistoon piirrettyä origokeskeistä ympyrää, jonka säde on 1.



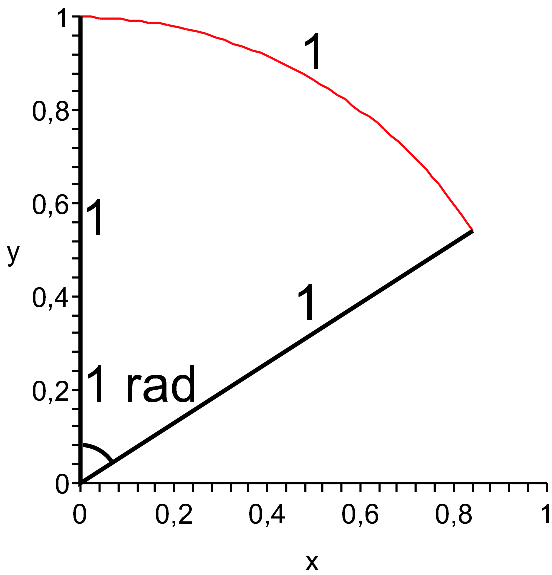
Sijoitamme yksikköympyrään *suunnatun kulman* (eli kulman, jossa on määrätty ns. *alkukylki* ja *loppukylki*) siten, että kulman kärkipiste on origossa ja alkukylki kulkee x-akselin positiivista puolta pitkin. Pidämme kulman suuruutta positiivisena, jos se aukeaa alkukyljestä vastapäivään, muutoin negatiivisena.



Kulma voi olla laajempikin kuin täysi ympyrä.



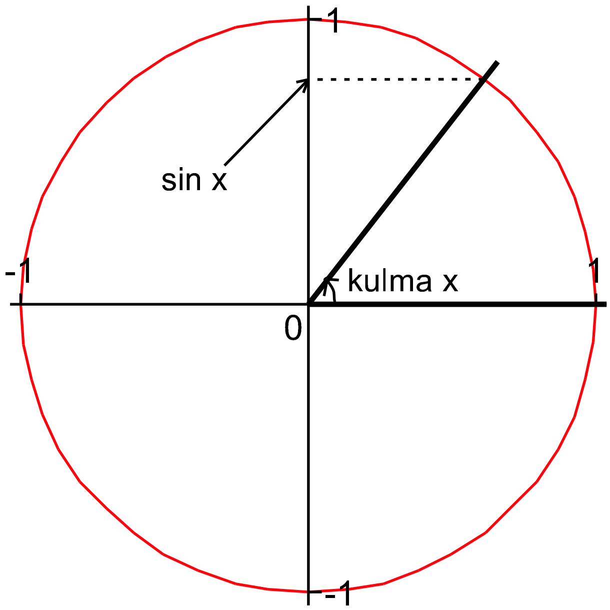
Kulman suuruus ilmoitetaan tavallisesti *radiaaneissa* eli *absoluuttisissa kulmayksiköissä*. Yksi radiaani on sellaisen kulman laajuus, jota vastaa yksikköympyrän kehällä 1-säteinen kaari.



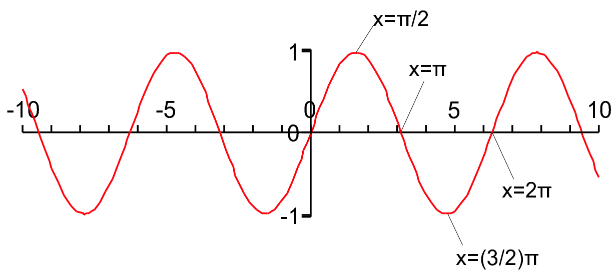
Koko ympyrässä eli täyskulmassa on tällöin 2π radiaania, oikokulma eli 180^o on π radiaania ja suora kulma on $\frac{\pi}{2}$ radiaania. Yleisesti asteiden ja radiaanien yhteys on seuraava:

$$\text{kulman suuruus radiaaneina} = \text{kulman suuruus asteina} \cdot \frac{\pi}{180}$$

5.1. **Sinifunktio.** Sinifunktio $\sin(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on määritelty seuraavasti: $\sin(x)$ on yksikköympyrään edellä kuvatulla tavalla sijoitetun suunnatun kulman loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspisteen *etäisyys x-koordinaatista* (eli y-koordinaatin arvo).

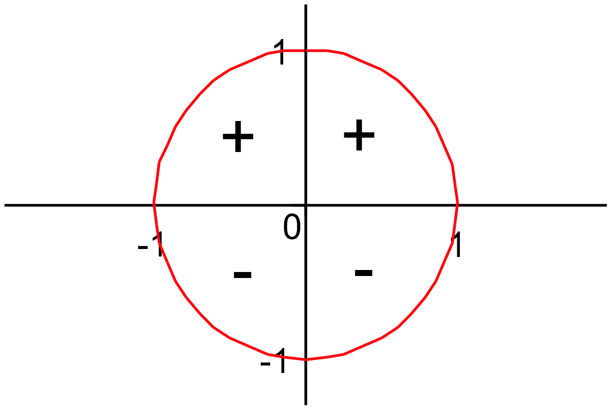


Funktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko eli $\mathbb{R}$. Sinifunktion arvot täyttävät suljetun välin $[-1, 1]$, toisin sanoen funktio saa kaikkia arvoja ko. väliltä, välin päätepisteet mukaan lukien. Sinifunktio on kaikkialla jatkuva. Sinifunktion kuvaaja, *sinikäyrä*, aaltoilee -1:n ja 1:n välillä:



Kuvasta nähdään, että sinifunktio kasvaa x:n kasvaessa 0:sta $\frac{\pi}{2}$:een, alkaa sitten vähetä, muuttuu negatiiviseksi arvon $x = \pi$ jälkeen, alkaa taas kasvaa arvon $x = \frac{3}{2}\pi$ jälkeen ja saavuttaa uudelleen nollan kohdassa $x = 2\pi$. Tämän voi todeta helposti myös pienentämällä ja kasvattamalla suunnattua kulmaa yksikköympyrässä. Käytännössä kohdat, joissa sinifunktion suunta tai merkki vaihtuu, osuvat kohtiin, joissa tarkasteltavan kulman loppukylki siirtyy koordinaatiston neljänneksestä toiseen—siis ovat suoran kulman kerrannaisia.

Useiden trigonometristen laskujen kannalta onkin käytännöllistä muodostaa ns. *merkkikaavio*, joka kertoo trigonometrisen funktion arvon etumerkin riippuen siitä, mihin koordinaatiston neljännekseen tarkasteltavan kulman loppukylki osoittaa.



Sinifunktio on *jaksollinen* ja toistaa samanlaista aaltoilua äärettömyyteen sekä positiivisessa että negatiivisessa suunnassa. Siten edellämainittu funktion kulku toistuu kuvaajassa aina 2π:n välein, ja funktiolla on ääretön määrä nollakohtia. Trigonometristen funktioiden nollakohtia laskettaessa onkin aina mainittava, että nollakohtia on funktion toistumisjakson välein ääretön määrä. Sinifunktion nollakohdat voisi esittää esim. seuraavasti:

$$x = 0 + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z},$$

jolloin nollakohtia (x) ovat luvun 0 lisäksi kaikki luvut, joissa nollaan on lisätty π mielivaltaisen monta kertaa. Tämä voidaan kirjoittaa myös yksinkertaisemmin

$$x = n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z},$$

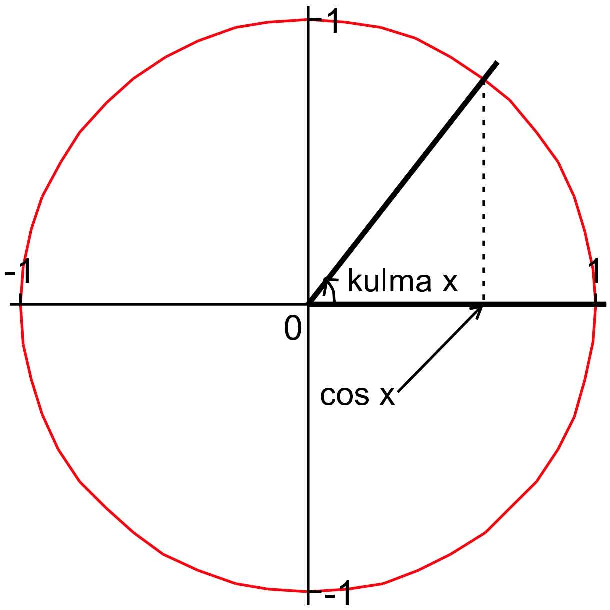
sillä $0 \cdot \pi = 0$. Huom! π:n kerroin n kuuluu merkinnän loppuosan mukaan kokonaislukujen joukkoon ($\in$ = ”kuuluu”, $\mathbb{Z}$ = ”kokonaislukujen joukko”), joten se voi myös olla negatiivinen — ovathan nollakohtia myös $-\pi$, -2π jne.

Esimerkki 5.1. Kun sinifunktio esiintyy yhdistelmänä jonkin muun funktion kanssa, saattavat jakso, nollakohdat ja arvot vaihdella. Esim. funktiossa $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{2})$ nollakohdat ja arvot poikkeavat $\sin(x)$:stä seuraavasti: Sinifunktion arvo on 0, kun sen lähtöarvo on $n \cdot \pi$, joten funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla x yhtälöstä $x + \frac{\pi}{2} = n \cdot \pi$.

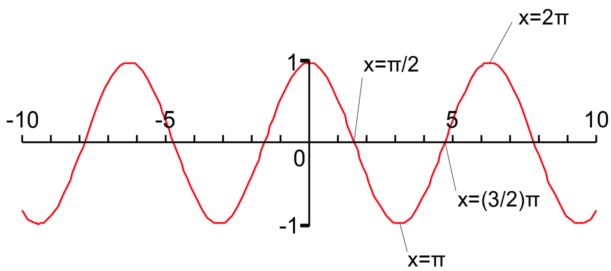
$$x + \frac{\pi}{2} = n \cdot \pi \iff x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

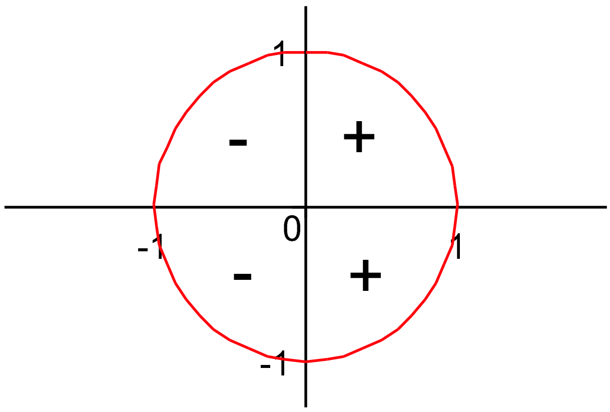
Nollakohdat ovat siis muotoa $-\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$. Funktion jakso pysyy tässä tapauksessa samana kuin tavallisen sinifunktion. Funktion arvot taas ovat välillä $[-2, 2]$, sillä tavallisen sinifunktion arvot (välillä $[-1, 1]$) on tässä kerrottu kahdella.

5.2. **Kosinifunktio.** Kosinifunktion määritelmä on hyvin samankaltainen kuin sinifunktion: kosinifunktion $\cos(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arvo on yksikköympyrään edellä kuvatulla tavalla sijoitetun suunnatun kulman loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspisteen etäisyys *y-koordinaatista* (x-koordinaatin arvo).



Myös kosinifunktio on määritelty kaikkialla $\mathbb{R}$:ssä ja se saa arvot väliltä $[-1, 1]$. Samaten kosinifunktio on jatkuva kaikkialla ja toistuu 2π:n pituisella jaksolla. Itse asiassa kosinifunktion kuvaaja on kuin sinifunktion kuvaaja siirrettynä sen verran vasemmalle, että lähtöarvolla 0 funktio saa arvon 1. Tutkimalla kosinin arvoja suhteessa yksikköympyrään sijoitettuun kulmaan saadaan kosinin merkkikaavio.





Kosinifunktion nollakohdat on helppo ilmaista samaan tapaan kuin sinifunktion, tällä kertaa nollakohtaa ei kuitenkaan löydy arvolta $x = 0$ vaan esim. kohdasta $x = \frac{\pi}{2}$. Nollakohdat ovat siis:

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z},$$

Esimerkki 5.2. Lasketaan funktion $f(x) = \cos(3x)$ nollakohdat. Tässä esimerkissä funktion jakso muuttuu, mutta arvot pysyvät samoissa rajoissa, koska kosinifunktio saa arvoja vain -1:n ja 1:n väliltä. Koska $\cos(x)$:n nollakohdat ovat $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, niin

$\cos(3x)$:llä ne saadaan yhtälöstä $3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

$$3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \iff x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$$

Nollakohdat ovat siis $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$

5.3. **Peruskaavoja.** Sini- ja kosinifunktioiden jaksollisuudesta johtuen samat funktioiden arvot toistuvat tasavälein $(n \cdot 2\pi)$ määrittelyjoukkoa (lukusuoraa) pitkin liikuttaessa. Tätä kuvaavat seuraavat kaavat:

$$\sin(x) = \sin(x + n \cdot 2\pi) \tag{5.3}$$

$$\cos(x) = \cos(x + n \cdot 2\pi) \tag{5.4}$$

joissa $n \in \mathbb{Z}$ eli n on mielivaltainen kokonaisluku. Yksikköympyrää tutkimalla voidaan myös helposti johtaa seuraavat säännöt sini- ja kosinifunktioiden arvoille eräissä erikoistapauksissa:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{5.5}$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \tag{5.6}$$

$$\sin(x) = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) \tag{5.7}$$

$$\cos(x) = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) \tag{5.8}$$

Tarkastelemalla yksikköympyrän avulla komplementtikulmia, siis kulmia, joiden summa on $\frac{\pi}{2}$ (eli 90^o), saadaan seuraavat komplementtikulmia koskevat lauseet:

$$\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \tag{5.9}$$

$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \tag{5.10}$$

Toisin sanoen kulman sini on sen komplementtikulman kosini ja kosini on komplementtikulman sini. Lisäksi suorakulmaista kolmiota koskeva, geometriasta tuttu ns. *Pythagoraan lause* on yhtäpitävä seuraavan ns. *trigonometrian peruskaavan* kanssa:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \tag{5.11}$$

missä merkinnät $\sin^2(x)$ ja $\cos^2(x)$ tarkoittavat samaa kuin $(\sin(x))^2$ ja $(\cos(x))^2$. Ratkaisemalla tästä kaavasta $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ saadaan sinin ja kosinin välille seuraavat yhteydet:

$$\sin(x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(x)} \tag{5.12}$$

$$\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}, \tag{5.13}$$

joissa etumerkki valitaan katsomalla merkkikaaviosta, kumman merkin ko. funktio saa annetulla arvolla (neliöjuurioperaattorihan antaa aina positiivisen tuloksen).

Esimerkki 5.14. Funktio $f(t) = 3\sin(3t)$ kuvaa erään harmonisen värähtelijän (esim. jousen päässä oleva punnus) paikkaa ajan (sekunteja) funktiona nollatasoon $f(t) = 0$ verrattuna. Ratkotaan numeerisesti, milloin värähtelijä on korkeudella $-\frac{1}{2}$.

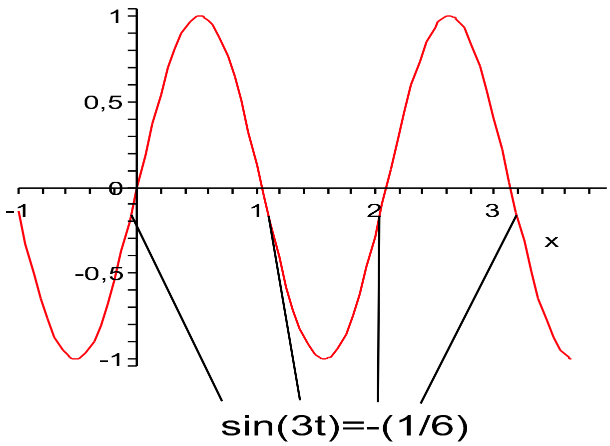
$$3\sin(3t) = -\frac{1}{2}$$

$$\iff \sin(3t) = -\frac{1}{6}$$

Nyt käytetään laskimen $\sin^{-1}$-näppäintä, joka kertoo, minkä luvun sini jokin luku on. Funktio $\sin^{-1}$ eli *arkussini* on sinin käänteisfunktio, eikä sen ominaisuuksiin syvennytä tarkemmin tällä kurssilla. Lasketaan laskimella:

$$\sin^{-1}(-\frac{1}{6}) \approx -0,167,$$

jolloin $3t$ on noin -0,167 ja $t \approx \frac{-0,167}{3} = -0,056$. Tämä on eräs ajanhetki, jolloin värähtelijä on kysytyllä korkeudella. Arkussinifunktio antaa kuitenkin vain yhden monista mahdollisista $3t$:n arvoista. Yksikköympyrästä tai kuvaajasta näemme, että arvoja on useita: kaksi funktion joka jaksossa.



Jakson toista arvoa kuvaa edellä esitetty palautuskaava $\sin(x) = \sin(\pi - x)$, josta saadaan tässä tapauksessa $\sin(3t) = \sin(\pi - 3t)$. Tällöin myös

$$\pi - 3t \approx -0,167 \quad (-\frac{1}{6}\text{:n arkussini})$$

$$\iff 3t \approx 0,167 + \pi$$

$$\iff t \approx \frac{0,167 + \pi}{3} \approx 1,10$$

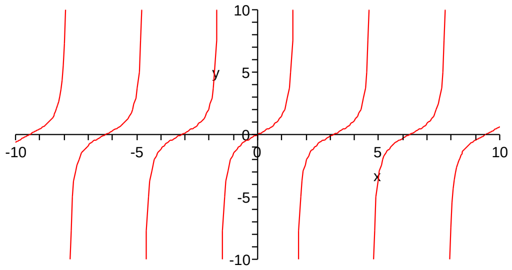
Tämä on toinen ajanhetki, jolloin värähtelijä on kysytyssä kohdassa. Lopuksi selvitetään värähtelijän jakso sinifunktion jaksoa kuvaavasta kaavasta $\sin(x) = \sin(x + n \cdot 2\pi)$. Sijoitetaan x:n paikalle $3t$ ja otetaan 3 yhteiseksi tekijäksi.

$$\sin(3t) = \sin(3t + n \cdot 2\pi) = \sin(3(t + n \cdot \frac{2}{3}\pi))$$

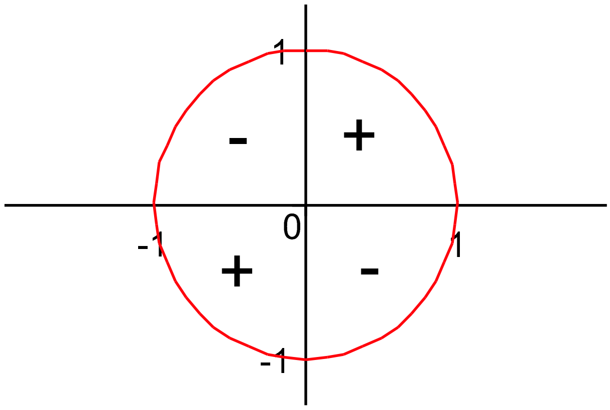
Näin saadaan selville, että värähtelijää kuvaavan funktion arvot toistuvatkin samana jakson $\frac{2}{3}\pi$ välein, joten kysytyt ajanhetket ovat likimain $-0,056 + n \cdot \frac{2}{3}\pi$ ja $1,10 + n \cdot \frac{2}{3}\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

5.4. **Tangenttifunktio.** Tangenttifunktio $\tan(x)$ on kolmas tavallinen trigonometrinen funktio, jonka ominaisuudet kuitenkin poikkeavat melkoisesti sini- ja kosinifunktioiden ominaisuuksista. Se määritellään *sinin ja kosinin osamääränä*, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Tangenttifunktion määrittelyjoukosta puuttuvat kaikki $\cos(x)$:n nollakohdat. Määrittelyjoukko on siis $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\}, n \in \mathbb{Z}$. Tangenttifunktio on määrittelyjoukossaan jatkuva ja saa arvoja koko reaalilukujen joukon alueelta. Tangenttifunktiokin on jaksollinen, jakson pituus on π ja nollakohdat ovat muotoa $x = 0 + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$ tai yksinkertaisemmin $x = n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$.



Merkkikaavio:



Lähtöarvojen kasvaessa tangenttifunktion arvot kasvavat rajatta määrittelyjoukosta puuttuvaa pistettä lähestyttäessä. Samaten lähtöarvojen pienetessä funktion arvot pienenevät rajatta samoja pisteitä kohti. Tämän todistaminen vaatii ns. toispuoleisen raja-arvon käsitettä, mutta toteamme tässä vain, että ilmiö johtuu jakajan eli kosinifunktion arvon merkin vaihtumisesta nollakohdan yli kuljettaessa.

Samoin kuin sini- ja kosinifunktioille, myös tangenttifunktiolle voidaan helposti johtaa seuraavat, toisinaan laskemista helpottavat peruskaavat yksikköympyrää tarkastelemalla:

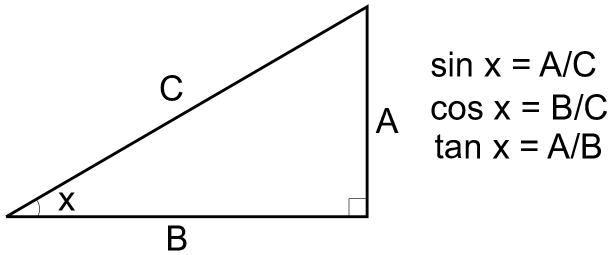
$$\tan(-x) = -\tan(x) \tag{5.15}$$

$$\tan(x) = -\tan(\pi - x) \tag{5.16}$$

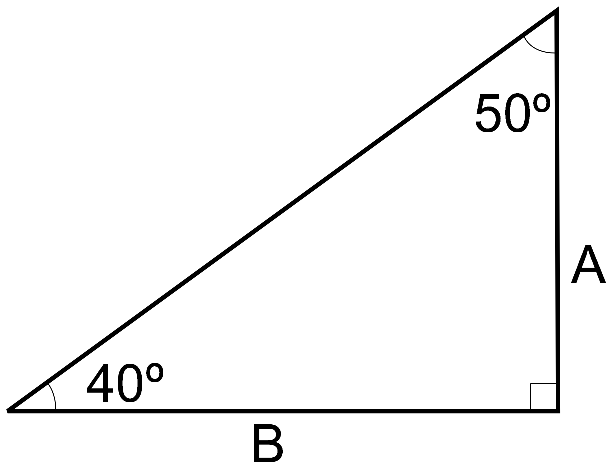
$$\tan(x) = \tan(x + n \cdot \pi), \tag{5.17}$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Esimerkki 5.18. Trigonometriset funktiot määritellään joskus suppeammin suorakulmaisen kolmion avulla siten, että kulman sini on sen vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan, kosini viereisen kateetin suhde hypotenuusaan ja tangentti vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin.



Tämän määritelmän, joidenkin siitä johdettujen lauseiden ja laskimen avulla on helppo ratkaista monia kolmioihin ja muihin geometrisiin kuvioihin liittyviä probleemoja. Otamme yksinkertaisen esimerkin: Kolmion kulmat ovat 90^o, 50^o ja 40^o.Hypotenuusan pituus on 5, kateettien pituuksia ei tunneta. Ne saadaan kuitenkin selville helposti trigonometristen funktioiden avulla. Tarkastellaan kolmion 40-asteista kulmaa ja todetaan, että sen sini ja kosini kuvaavat kateettien suhteita hypotenuusaan. Annetaan kateeteille nimet A ja B seuraavan kuvan mukaisesti.



Tällöin kateettien pituudet saadaan laskemalla:

$$\sin(40^o) = \frac{A}{5} \iff A = 5 \cdot \sin(40^o)$$

$$\cos(40^o) = \frac{B}{5} \iff B = 5 \cdot \cos(40^o)$$

Pituuksille saadaan likiarvot laskimella.

6. Yhdistetty funktio

Määritelmä 6.1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$. Funktioiden f ja g *yhdistetty funktio* $f \circ g$ määritellään seuraavasti:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Funktiota f kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota g *sisäfunktioksi.*

Esimerkki 6.2. Jos $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, yhdistetty funktio $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$ ja $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$. Funktio $h(x) = \sin(x^2 + 2x + 1)$ voidaan tulkita yhdistetyksi funktioksi $(f \circ g)(x)$, jossa $f(x) = \sin(x)$ ja $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Funktio $h(x) = \sin^2(x) + 2\sin(x) + 1$ voidaan taas tulkita yhdistetyksi funktioksi $(f \circ g)(x)$, jossa $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ja $g(x) = \sin(x)$.

Huom! Yhdistetty funktio ei varsinaisesti ole oma funktiolajinsa, vaan mikä tahansa funktio voidaan tulkita sopivista funktioista yhdistetyksi, esim. jos $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x^3$ niin $(f \circ g)(x) = (x^3)^2 = x^6$.

Esimerkki 6.3. Funktio pysyy samana, kun siihen yhdistetään identtinen kuvaus (siis funktio muotoa $f(x) = x$) Vakiofunktio ulkofunktiona puolestaan hävittää sisäfunktion merkityksen. (Jos $f(x) = 2$, niin $(f \circ g)(x) = 2$ kaikilla g(x).)

7. Derivaatta

Tähän mennessä on tarkasteltu lähinnä funktioiden määrittelyä, arvoja joita funktiot voivat saada, niiden raja-arvoja joissakin pisteissä tai äärettömyydessä sekä jatkuvuutta. Lähinnä olemme siis puhuneet funktioiden ominaisuuksista joidenkin arvopisteiden, esim. nollakohtien kannalta. Mm. funktion kuvaajaa tutkimalla voidaan kuitenkin nähdä funktiosta muutakin olennaista kuin vain sen määrittelyä, arvoja ja jatkuvuutta koskevia tietoja. Eräs monien reaalifunktioiden selkeä ominaisuus on kuvaajan suunta ja jyrkkyys. Tällä on monia käytännön kannalta tärkeitä tulkintoja funktiosta riippuen. Esimerkiksi edettyä matkaa ajan funktiona kuvaava käyrä on sitä jyrkemmin nouseva, mitä nopeampaa matkanteko on. Funktion kuvaajan muotoja tutkimalla voidaan myös usein löytää sen pienimpiä tai suurimpia arvoja, joko jollakin välillä taikka koko funktion määrittelyjoukossa.

Funktion suuntaa tai jyrkkyyttä on toisinaan helppo arvioida silmämääräisesti kuvaajasta, mutta sen matemaattinen tarkastelu vaatii täsmällistä määrittelyä. Mistä oikeastaan tiedämme, mikä on jonkin kuvaajan suunta *tietyssä pisteessä*? Sehän on vain yksittäinen arvopiste, lähtöjoukon arvon ja funktion arvon muodostama pari. Määrittelemme tässä luvussa funktion kulun tarkastelemiseksi funktion *derivaatan*, jolla kuvaamme *funktion hetkellistä muutosnopeutta* eli sen kuvaajan jyrkkyyttä tietyssä pisteessä, ja käytämme apuna käsiteltävän arvopisteen lisäksi myös muita läheisiä funktion arvoja.

Kaikkia funktioita ei voida derivoida kaikissa pisteissään, esimerkiksi funktion epäjatkuvuuskohdassa on mahdoton sanoa funktion muutosnopeutta, koska sen arvo muuttuu äkkinäisellä hyppäyksellä, tavallaan äärettömän nopeasti. Siksi joudumme määrittelemään myös *derivoituvuuden*, joka kertoo, onko funktion hetkellistä muutosnopeutta jossakin pisteessä mahdollista sanoa.

Derivaatan määrittelyssä käytetään apuna helpommin määriteltävää funktion muutosnopeutta jollakin välillä. Tälle voidaan muodostaa lauseke

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

jossa x_1 ja x ovat lähtöjoukon arvopisteitä. Lauseke kuvaa funktion arvojen etäisyyden suhdetta vastaavien lähtöarvojen etäisyyteen toisistaan ja sitä kutsutaan *erotusosamääräksi*. Kuljettua matkaa kuluneen ajan funktiona kuvaavassa esimerkkifunktiossamme erotusosamäärä tarkoittaisi jollakin aikavälillä kuljetun matkan jakamista siihen kuluneella ajalla ja kertoisi siten matkan *keskinopeuden* ko. aikana.

Kuvataan $x_1 - x$:ää eli lähtöarvojen etäisyyttä kirjaimella h, jolloin erotusosamäärän kaava saadaan muotoon

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivaatta muodostetaan erotusosamäärästä etsimällä sen *raja-arvo*, kun h lähestyy nollaa eli kun tarkasteltava väli pienenee loputtomiin.

Määritelmä 7.1. Funktio f on *derivoituva pisteessä* x, jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa. Tätä raja-arvoa merkitään $f'(x)$, $Df(x)$ tai $\frac{df}{dx}(x)$, ja kutsutaan funktion f *derivaataksi* pisteessä x. Funktio on *derivoituva*, jos se on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä.

Derivaatta kuvaa funktion hetkellistä muutosnopeutta. Jos funktio kuvaa kuljettua matkaa, derivaatta kuvaa nopeutta; jos funktio kuvaa nopeutta, derivaatta kuvaa kiihtyvyyttä; jos funktio kuvaa lämpötilaa, derivaatta kuvaa lämpenemis- tai jäähtymisnopeutta. Derivaatan avulla saadaan paljon tietoa funktion käyttäytymisestä.

Esimerkki 7.2. Tarkastellaan polynomifunktiota $f(x) = x^2$ pisteessä $x = 2$. Erotusosamäärä tuossa pisteessä on

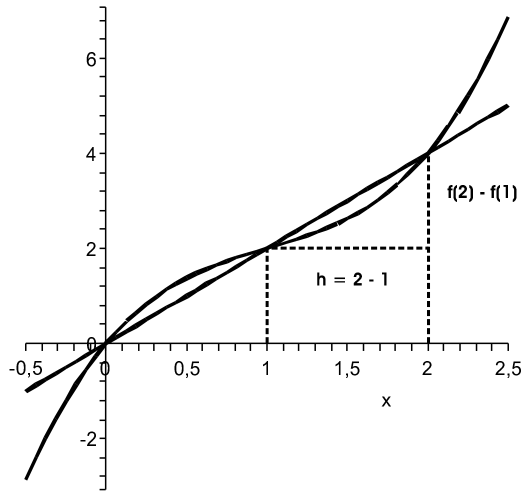
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

Tällä on raja-arvo

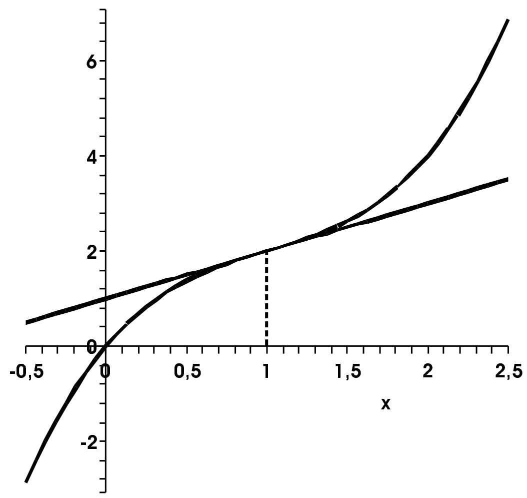
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$

Funktiolla on siis pisteessä 2 derivaatta $f'(2) = 4$.

7.1. **Derivaatta kuvaajassa.**



Tarkastellaan oheista kuvaa, johon on piirretty erään derivoituvan funktion f kuvaaja sekä suora, joka leikkaa kuvaajaa pisteissä $x = 1$ ja $x = 2$. Tämän suoran kulmakerroin on $(f(2) - f(1))/(2-1)$ eli erotusosamäärän arvo pisteessä 1, kun $h = 1$. Luku h vastaa siis toisen leikkauspisteen x-koordinaatin etäisyyttä ensimmäisen leikkauspisteen x-koordinaatista. Pienentämällä arvoa h saadaan toinen leikkauspiste lähestymään ensimmäistä, jolloin suora kääntyy kuvaajan suuntaiseksi kunnes se leikkaa kuvaajaa lopulta vain yhdessä pisteessä.



Erotusosamäärän raja-arvo eli derivaatta pisteessä x on siis tuohon pisteeseen kuvaajalle piirretyn *sivuajan eli tangentin* kulmakerroin. (Ei pidä sekoittaa tangenttifunktioon, vaikka näiden määrittelyssä onkin yhteys.)

Esimerkki 7.3. Tarkastellaan funktiota $f(x) = |x|$ (itseisarvo) pisteessä $x = 0$. Kun $h > 0$, erotusosamäärä on

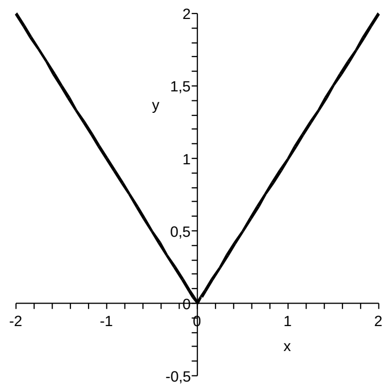
$$\frac{|h| - |0|}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1.$$

Toisaalta, kun $h < 0$, erotusosamäärä on

$$\frac{|h| - |0|}{h} = \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Erotusosamäärällä ei siis ole raja-arvoa h:n lähestyessä nollaa, koska nollan vasemmalla ja oikealla puolella lasketut arvot eivät lähesty toisiaan. Itseisarvo ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

Tämä näkyy myös itseisarvon kuvaajasta. Kuvaajalla on origossa terävä kärki, eikä siihen voida piirtää yksikäsitteistä sivuajaa kuvaajalle.



Jos funktiolla on epäjatkuvuuskohta jossain pisteessä, ei tähän pisteeseen voida piirtää kuvaajalle sivuajaa. Tämä havainto kertoo seuraavasta tosiasiasta.

Lause 7.4. *Jos funktio on derivoituva pisteessä x, se on myös jatkuva pisteessä x.*

Epäjatkuva funktio ei siis voi olla derivoituva.

7.2. **Laskusääntöjä.** Derivaatan määritelmän avulla pystytään monille tavallisille derivoituville funktioille johtamaan melko helposti laskusääntöjä, jotka tässä esitämme listana. Aloitetaan säännöistä, joilla voi laskea funktioiden summien, tulojen ja osamäärien derivaattoja.

1. $D(f \pm g)(x) = f'(x) \pm g'(x)$
2. $D(cf)(x) = cf'(x)$, jos c on vakio
3. $D(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $D(f/g)(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Näitä sääntöjä sovellettaessa täytyy ensin varmistaa, että funktiot todella ovat derivoituvia tai että ne on edes määritelty kyseisessä pisteessä. Sääntö 3 esimerkiksi vaatii, että $g(x) \neq 0$.

Ennen seuraavia sääntöjä palautetaan mieleen murto- ja negatiivisten potenssien määritelmät. Olkoon k kokonaisluku. Tällöin

$$x^k = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k}, \text{ jos } k > 0, \\ 1, \text{ jos } k = 0, \\ \frac{1}{x^{-k}}, \text{ jos } k < 0. \end{cases}$$

Olkoon sitten p, q kokonaislukuja, $q > 0$. Tällöin
$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

Esimerkiksi $x^{1/2} = \sqrt{x}$. Huomaa, ettei parillinen juuri ole määritelty negatiivisille luvuille ja että parillinen juuri määritellään aina positiiviseksi. (Esimerkiksi $\sqrt{-4}$ ei ole määritelty, ja $\sqrt{4} = 2$, vaikka myös $(-2)^2 = 4$).

Nyt voidaan määritellään potensseja koskevat säännöt.

5. $Dc = 0$, jos c ei riipu x:stä (eli on vakio)
6. $Dx^k = kx^{k-1}$, jos $k \neq 0$.

Esimerkki 7.5. Derivoidaan polynomifunktio:
$$D(x^2 + 2x - 3) = Dx^2 + 2Dx - D\,3 = 2x^1 + 2 \cdot 1 - 0 = 2x + 2.$$

Derivoidaan rationaalifunktio:
$$\begin{aligned} D\frac{x^2 - 3x}{x + 1} &= \frac{D(x^2 - 3x)(x + 1) - (x^2 - 3x)D(x + 1)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{(2x - 3)(x + 1) - (x^2 - 3x)(1 + 0)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{(2x^2 + 2x - 3x - 3) - (x^2 - 3x)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Derivoidaan vielä juurifunktio:
$$\begin{aligned} D\ \frac{3}{\sqrt[3]{x}} &= D\left(3(\sqrt[3]{x})^{-1}\right) = D\left(3(x^{1/3})^{-1}\right) = D\left(3x^{-1/3}\right) \\ &= 3 \cdot (-\frac{1}{3})x^{-1/3-1} = -x^{-4/3} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi johdamme eksponenttifunktion derivaatan erään eksponenttifunktion ominaisuuksista. Tämän eksponenttifunktion kantaluku on ns. *Neperin luku e*.
$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828.$$

Neperin luvun potenssit voidaan ilmaista päättymättöminä summina
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$
(Tämän todistaminen ei mahdu kurssin materiaaliin.)

Jos muodostamme derivaatan funktiosta $f(x) = e^x$ edellä esitetyn sarjakehitelmän ja derivaatan tähänastisten laskusääntöjen avulla, saamme tulokseksi
$$De^x = 0 + \frac{1! \cdot 1 - x \cdot 0}{(1!)^2} + \frac{2! \cdot 2x - x^2 \cdot 0}{(2!)^2} + \frac{3! \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 0}{(3!)^2} + \ldots$$

eli
$$De^x = 1 + \frac{2! \cdot 2x}{2!^2} + \frac{3! \cdot 3x^2}{3!^2} + \ldots$$
Supistetaan kertomat pois osoittajista, jolloin saadaan
$$De^x = 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots$$
Supistetaan vielä pois osoittajien kertoimet ja nimittäjistä kertoman suurin tekijä (kertoman määritelmä oli $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$), jolloin saadaan
$$De^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

joka on itse asiassa sama kuin alkuperäisen funktion sarjakehitelmä siten, että ensimmäisen termin derivaatasta tuli nolla, toisen termin derivaatasta sama kuin alkuperäinen ensimmäinen termi, kolmannen termin derivaatasta alkuperäinen toinen termi jne. Tästä päättelystä saamme seuraavan derivointisäännön:

7. $De^x = e^x$

Joskus eksponenttifunktio määritelläänkin funktiona, jonka derivaatta on funktio itse (e^x) ja yleinen eksponenttifunktio eri kantaluvuilla yleistetään tästä. e-kantaisen logaritmifunktion derivaatta puolestaan on

8. $D \ln x = \frac{1}{x}$

Trigonometristen funktioiden derivaatat voidaan johtaa suhteellisen helposti geometrisesti. Meille kuitenkin riittää todeta, että

9. $D \sin(x) = \cos(x)$
10. $D \cos(x) = -\sin(x)$

mistä saamme osamäärän derivaattasääntöä ja trigonometrian peruskaavaa käyttämällä

11. $D \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Seuraava sääntö koskee *yhdistettyä funktiota*. Huomaa, että mikä tahansa funktio voidaan tulkita yhdistetyksi! Toisinaan tästä säännöstä on kuitenkin erityistä hyötyä, kun funktio on muuten vaikea derivoida, esimerkiksi jos funktiossa on neliöjuuren (ulkofunktio) alla jokin polynomi tai rationaalilauseke (sisäfunktio). Myös monet eksponentti- logaritmi- ja trigonometristen funktioiden sovellukset derivoituvat näppärästi tällä tavoin.

12. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Esimerkki 7.6. Olkoon $f(x) = x^6$, $g(x) = 2x + 1$. Nyt $f'(x) = 6x^5$ ja $g'(x) = 2$, joten yhdistetyn funktion $f \circ g$ derivaatta on

$$D(2x+1)^6 = 6(2x+1)^5 \cdot 2 = 12(2x+1)^5.$$

Esimerkki 7.7. Johdetaan funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$ derivaatta. Logaritmin määritelmän sekä laskusääntöjen avulla voidaan kirjoittaa

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}.$$

Nyt voidaan laskea funktion f derivaatta yhdistetyn funktion derivointisäännöllä. Ulkofunktio on eksponenttifunktio, jonka derivaatta on funktio itse. Sisäfunktion derivaatta on

$$D(x \ln x) = D\ x \cdot \ln x + x \cdot D \ln x = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Funktion f derivaatta on siten

$$f'(x) = D\ e^{x \ln x} = e^{x \ln x} \cdot D(x \ln x) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Lopuksi johdamme yleiset eksponentti- ja logaritmifunktion derivointikaavat. Tämä tehdään *ilmaisemalla yleiset eksponentti- ja logaritmifunktiot vastaavien e-kantaisten funktioiden avulla* ja käyttämällä yhdistetyn funktion derivointikaavaa.

Koska logaritmin määritelmän mukaan

$$x = a^{\log_a x},$$

niin

$$a^x = e^{\ln a^x}$$

Eksponenttifunktion laskusäännöillä tästä saadaan edelleen

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} = (e^x)^{\ln a}$$

eli yleisen a-kantaisen eksponenttifunktion arvot ovat saadaan siis korottamalla e-kantaisen eksponenttifunktion arvo potenssiin $\ln a$.

Nyt voidaan johtaa a-kantaisen eksponenttifunktion derivointikaava käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä sekä eksponenttifunktion laskusääntöjä. Merkitään $f(x) = x^{\ln a}$ ja $g(x) = e^x$, jolloin $f'(x) = \ln a \cdot x^{\ln a - 1}$ ja $g'(x) = e^x$. Nyt pätee

$$a^x = (e^x)^{\ln x} = (f \circ g)(x),$$

joten

$$D\ a^x = f'(g(x))g'(x) = \ln a (e^x)^{\ln a - 1} \cdot e^x = \ln a (e^x)^{\ln a - 1 + 1} = \ln a (e^x)^{\ln a} = a^x \ln a.$$

a-kantainen logaritmi taas voidaan ilmaista luonnollisen logaritmin avulla seuraavalla menettelyllä: Ilmaistaan ensin e-kantainen eli *luonnollinen* logaritmi luvusta x logaritmin määritelmän ja laskusääntöjen mukaan muodossa

$$\ln x = \ln a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \ln a.$$

Tästä seuraa, että

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Luonnollisesta logaritmista saadaan siis mikä tahansa a-kantainen logaritmi jakamalla luvulla $\ln a$. Tällöin a-kantaisen logaritmin derivaatta on

$$D \log_a x = D\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln a \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 0}{(\ln a)^2}$$

($\ln a$:han on vakio!) Tämä sievenee muotoon

$$\frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Muistetaan, että logaritmifunktio on määritelty vain positiivisilla reaaliluvuilla. Vastaavalla päättelyllä saadaan sama derivointikaava myös funktiolle $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a(-x)$. Kaksi viimeistä derivointikaavaa ovat siis

13. $Da^x = a^x \cdot \ln a$
14. $D \log_a |x| = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

7.3. **Derivaatan sovelluksia.** Derivaatan avulla voidaan tutkia funktion kasvua sekä funktion saamia *ääriarvoja*. Määritellään ensin näihin liittyviä käsitteitä.

Määritelmä 7.8. Funktiolla f on pisteessä x_0 *paikallinen eli lokaali maksimi*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla pisteillä x pisteen x_0 lähiympäristössä. Tämä arvo on *funktion suurin arvo*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla määrittelyjoukon pisteillä x.

Vastaavasti määritellään paikallinen minimi ja funktion pienin arvo. Minimejä ja maksimeja kutsutaan funktion *ääriarvoiksi*.

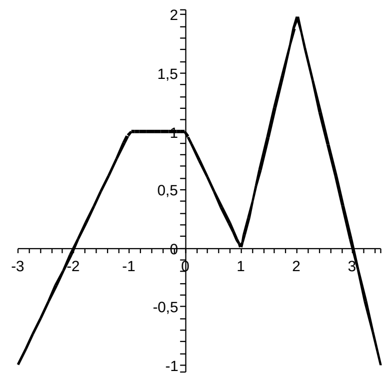
Määritelmä 7.9. Funktio f on *kasvava välillä* $[a, b]$, jos kaikilla pisteillä $x < y$ välillä $[a, b]$ pätee $f(x) \leq f(y)$. Jos lisäksi pätee $f(x) < f(y)$, sanotaan, että funktio on *aidosti kasvava* kyseisellä välillä.

Vastaavasti määritellään vähenevä ja aidosti vähenevä funktio.

Esimerkki 7.10. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ kun } x < -1 \\ 1, \text{ kun } -1 \leq x < 0 \\ -x + 1, \text{ kun } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 2, \text{ kun } 1 \leq x < 2 \\ -2x + 6, \text{ kun } x \geq 2. \end{cases}$$

Tällä funktiolla on paikallinen maksimi pisteessä $x = 2$ sekä jokaisessa pisteessä välillä $[-1, 0]$. Paikallinen minimi löytyy pisteestä $x = 1$ sekä myös kaikista pisteistä välillä $]-1, 0[$. Suurin arvo on $f(2) = 2$, mutta pienintä arvoa ei ole. Funktio on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -1]$ ja $[1, 2]$, ja aidosti vähenevä väleillä $[0, 1]$ ja $[2, \infty[$. Välillä $[-1, 0]$ funktio on sekä kasvava että vähenevä.



Jos derivoituvan funktion kuvaajalle piirretään sivuaja maksimi- tai minimikohtaan, sivuaja on vaakasuora eli sen kulmakerroin on nolla. Suoraan derivaatan määritelmästä voidaankin johtaa seuraava tätä havaintoa vastaava lause.

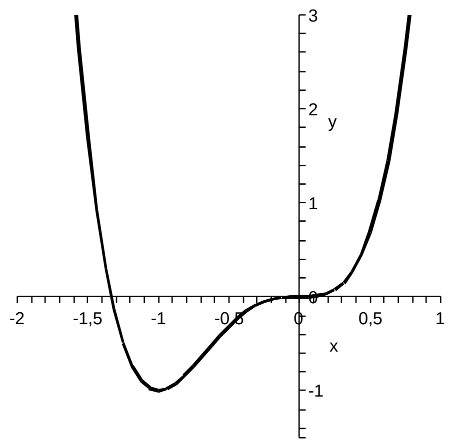
Lause 7.11. *Jos derivoituvalla funktiolla on paikallinen ääriarvo pisteessä x_0, niin $f'(x_0) = 0$.*

Huom. Kaikki derivaatan nollakohdat eivät aina ole ääriarvoja.

Esimerkki 7.12. Tarkastellaan 4. asteen polynomia $f(x) = 3x^4+4x^3$. Tämän derivaatta on

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 3x^4 = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1).$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 0$. Tarkempi tutkimus osoittaa, että edellinen on itse asiassa funktion pienin arvo, mutta jälkimmäinen ei ole ääriarvo ollenkaan.



Seuraavat lauseet seuraavat niin kutsutusta *väliarvolauseesta.*

Lause 7.13. *Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$, niin funktio f on kasvava kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin f on aidosti kasvava tuolla välillä.*

Vastaava pätee myös negatiiviselle derivaatalle.

Lause 7.14. *Jos $f'(x) \leq 0$ välillä $[a, b]$, niin funktio f on vähenevä kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin f on aidosti vähenevä tuolla välillä.*

Esimerkki 7.15. Tarkastellaan edelleen edellisen esimerkin polynomifunktiota. Derivaatta oli $f'(x) = 12x^2(x+1)$. Tunnetusti $12x^2$ ei ole koskaan negatiivinen, ja $x+1$ on negatiivinen vain, jos $x < -1$. Näiden termien tulo on negatiivinen vain jos ainoastaan toinen termeistä on negatiivinen. Kerätään nämä tiedot *merkkikaavioon.*

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x$
$12x^2$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$

Edellisten lauseiden perusteella f on vähenevä välillä $]-\infty, -1]$ ja kasvava välillä $]-1, \infty[$. Väheneminen ja kasvaminen on aitoa, sillä derivaatta on nolla vain yksittäisissä pisteissä. Nyt voidaan myös päätellä, mitkä edellisessä esimerkissä lasketuista derivaatan nollakohdista ovat ääriarvokohtia. Pisteen $x = 0$ ympärillä f on aidosti kasvava, joten se ei voi olla ääriarvokohta. Toisaalta pisteen $x = -1$ vasemmalla puolella f on vähenevä ja oikealla puolella kasvava, joten kyseessä on lokaali minimikohta.

Näillä tiedoilla voidaan jo hyvin tarkasti määrittää derivoituvan funktion kulku. Eräs lisätieto auttaa ääriarvojen löytämisessä.

Lause 7.16. *Suljetulla välillä määritelty jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tuolla välillä. Jos funktio on lisäksi derivoituva, suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista.*

Esimerkki 7.17. Tarkastellaan nyt funktiota $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ suljetulla välillä $[-2, 1]$. Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdissa sekä välin päätepisteissä.

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(-2) = 16, \quad f(1) = 7.$$

Edellisen lauseen perusteella funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 1]$ löytyvät näiden arvojen joukosta. Suurin arvo on selvästi $f(-2) = 16$ ja pienin $f(-1) = -1$.

Monet arkielämän optimointiongelmat voidaan edellä opittujen seikkojen avulla käsitellä derivaatan avulla.

Esimerkki 7.18. Maanviljelijällä on 20 metriä verkkoaitaa. Hän haluaa rakentaa kanoille suorakulmaisen aitauksen. Aitatarpeita säästääkseen hän päättää rakentaa aitauksen ladon viereen niin, että ladon seinä korvaa toisen aitauksen pitkistä sivuista. Miten pitkät on aitauksen sivujen oltava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman iso?

Ratkaisun löytämiseksi muodostetaan funktio, joka kuvaa maksimoitavaa suuretta jonkin muuttujan funktiona. Maksimoitava suure on aitauksen pinta-ala, joka lasketaan pitkän ja lyhyen sivun tulona. Merkitään lyhyen sivun pituutta x. Pitkälle sivuille jää tällöin $20 - 2x$ metriä verkkoaitaa. Näin saadaan aitauksen pinta-ala lyhyen sivun pituuden funktiona:

$$A(x) = x \cdot (20 - 2x) = -2x^2 + 20x.$$

Lyhyt sivu on vähintään 0 ja enintään 10 metriä pitkä. Funktio A on siis määritelty suljetulla välillä $[0, 10]$. Se on derivoituva, joten suurin arvo löytyy määrittelyvälin päätepisteestä tai derivaatan nollakohdasta. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 20.$$

Derivaatta on nolla vain jos $x = 5$. Suurin arvo löytyy siis seuraavien arvojen joukosta:

$$A(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 = 50, \quad A(0) = 0, \quad A(10) = 0.$$

Suurin pinta-ala saadaan siis, kun lyhyen sivun pituus on 5 metriä, jolloin pitkän sivun pituudeksi tulee 10 metriä.

Esimerkki 7.19. Suorakulmio sijaitsee koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä siten, että sen yksi kulma on origossa ja vastakkainen kulma suoralla $y = -2x + 3$ (ks. kuva). Laske tällaisen suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

Merkitään suorakulmion alareunan pituutta x. Tällöin suorakulmion korkeus on $-2x+3$, joten ala on

$$A(x) = x(-2x+3) = -2x^2 + 3x.$$

Tehtävänannon mukaan täytyy olla $0 \leq x \leq 3/2$. Määrittelyvälin päätepisteissä ala on 0, joten suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 3,$$

ja tämän ainoa nollakohta on $x = 3/4$. Alan suurin arvo on siis

$$A(3/4) = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}.$$

Oltaisiin voitu myös kysyä kuinka pitkä on lyhin tie origosta po. funktion kuvaajalle. Tämän voidaan nähdä kuvasta kulkevan erästä kuvaajan normaalia pitkin, mutta aina kuvaaja ei ole välttämättä suora. Tällöin voidaan korvata pinta-alan lauseke toisella lausekkeella, joka kertoo sellaisen suoran pituuden, joka yhdistää kuvaajan origoon, x:n funktiona. Tällöin optimoitava funktio (janan pituus) olisi Pythagoraan lauseen avulla:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + (-2x+3)^2}$$

Tämän derivaatta saadaan selville esim. sieventämällä juuren alla oleva lauseke polynomiksi ja käyttämällä sitten yhdistetyn funktion derivointikaavaa, jolloin ulkofunktio olisi $\sqrt{x}$ ja sisäfunktio $5x^2 - 12x + 9$.

7.4. **Korkeammat derivaatat.** Funktion f derivaatta f' on funktio, joten myös se voi olla derivoituva. Tämä pätee myös derivaatan derivaatalle ja niin edelleen. Jos f voidaan derivoida n kertaa, tulosta kutsutaan *n:nneksi derivaataksi* ja merkitään jollain seuraavista tavoista:

$$f^{(n)}, \quad D^{(n)}f, \quad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Jos n on pieni, kuten 2 tai 3, voidaan myös merkitä f'' tai f'''.

Esimerkki 7.20. Eksponenttifunktio on aina aidosti positiivinen. Koska sen derivaatta on sama kuin funktio itse, myös derivaatta on aina positiivinen. Siksi eksponenttifunktio on aidosti kasvava. Samalla tavoin myös derivaatta on aidosti kasvava, ja derivaatan derivaatta, jne. Voidaan sanoa, että eksponenttifunktio kasvaa hyvin nopeasti, nopeammin kuin mikään polynomifunktio. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla polynomeilla P pätee

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0.$$

Erityisesti

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Toinen derivaatta kertoo funktion derivaatan kasvusta. Jos esimerkiksi s kuvaa kuljettua matkaa, kuvaa s' nopeutta ja s'' vastaavasti kiihtyvyyttä.

Seuraava toisen derivaatan ominaisuus voi olla hyödyksi.

Lause 7.21. *Oletetaan, että f on kahdesti derivoituva ja f':lla on nollakohta pisteessä x_0. Tällöin pätee:*

a) *jos $f''(x_0) < 0$, niin x_0 on f:n paikallinen maksimikohta,*

b) *jos* $f''(x_0) > 0$, *niin* x_0 *on* f*:n paikallinen minimikohta.*

Sen sijaan, jos $f''(x_0) = 0$, *niin kohdassa* x_0 *voi olla paikallinen ääriarvo tai olla olematta.*

Esimerkki 7.22. Olkoon jälleen $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Ensimmäinen derivaatta on

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2,$$

ja toinen derivaatta

$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x = 36x^2 + 24x.$$

Derivaatan nollakohdat olivat $x = -1$ ja $x = 0$. Toisen derivaatan arvot näissä pisteissä ovat

$$f''(-1) = 36 \cdot 1 + 24(-1) = 12, \quad f(0) = 0.$$

Kohdassa $x = -1$ on siis lokaali minimi, mutta kohdasta $x = 0$ ei osata tällä perusteella sanoa mitään.

Esimerkki 7.23. Etsitään funktion $f(x) = 2\sin(3x)$ paikalliset maksimi- ja minimikohdat avoimella välillä $]0, 2[$. Etsitään funktion derivaatan nollakohdat. Funktion derivaatta on

$$f'(x) = 2(\cos(3x) \cdot 3) = 6\cos(3x)$$

$6\cos(3x) = 0$ kun $\cos(3x) = 0$. MAOLin taulukosta (tai yksikköympyrästä) saadaan $3x = \frac{\pi}{2}$. Säännön $\cos(x) = \cos(-x)$ mukaan myös $-3x = \frac{\pi}{2}$. Kun muistetaan vielä kosinin jaksoa koskeva sääntö, saadaan derivaatan nollakohdiksi

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \\ \iff x &= \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned} -3x &= \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \\ \iff x &= -\frac{\pi}{6} - n \cdot \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

Nämä arvot voidaan yksinkertaisemmin esittää muodossa

$$x = \frac{1}{6}\pi + n \cdot \frac{1}{3}\pi.$$

Laskemalla derivaatan nollakohtien likiarvoja huomataan, että kysytylle välille niitä osuu kaksi, $\frac{1}{6}\pi$ ja $\frac{1}{2}\pi$. Nyt voidaan tutkia toisen derivaatan avulla, ovatko kyseiset kohdat funktion paikallisia maksimeja tai minimejä.

$$f'' = 6 \cdot (-\sin(3x) \cdot 3) = 18 \cdot (-\sin(3x))$$

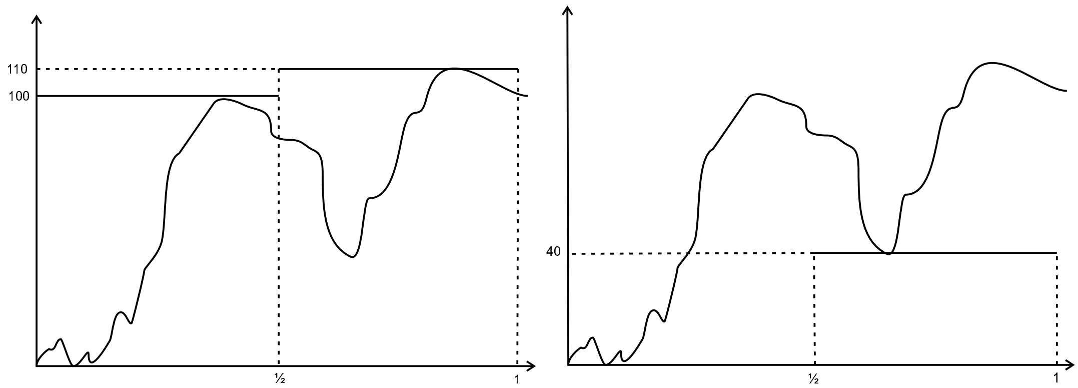
Koska $f''(\frac{1}{6}\pi) = -18$ ja $f''(\frac{1}{2}\pi) = 18$, on funktiolla paikallinen maksimi kohdassa $x = \frac{1}{6}\pi$ ja paikallinen minimi kohdassa $x = \frac{1}{2}\pi$. Tämä on yhtäpitävä yksikköympyrässä tehtävän graafisen tarkastelun kanssa.

8. Integraali

Tarkastellaan linja-autoa matkalla Kotkasta Helsinkiin. Olkoon $v : [0, 2] \to \mathbb{R}$ linja-auton nopeus ajan funktiona. Yritetään arvioida nopeusfunktion perusteella kuljettua matkaa aikavälillä $[0, 1]$.

Oletetaan, että maksiminopeus välillä $[0, 1]$ on ollut 110 km/h, ja miniminopeus 0 km/h (bussi seisoi asemalla). Koska kuljettu matka on yleisesti nopeus kerrottuna matkaan käytetyllä ajalla, voimme erittäin karkeasti arvioida linja-auton kulkeman matkan olleen enintään $110 \cdot 1 = 110$ km, ja vähintään $0 \cdot 1 = 0$ km.

Jaetaan sitten aikaväli kahteen osaan. Olkoon maksiminopeus välillä $[0, 1/2]$ ollut 100 km/h ja välillä $[1/2, 1]$ 110 km/h. Miniminopeudet olivat vastaavasti 0 km/h ja 40 km/h. Nyt voimme arvioida, että ensimmäisellä osalla edettiin enintään $100 \cdot 1/2 = 50$ km ja vähintään $0 \cdot 1/2 = 0$ km, sekä toisella osalla enintään $110 \cdot 1/2 = 55$ km ja vähintään $40 \cdot 1/2 = 20$ km. Todetaan, että ensimmäisen tunnin aikana edettiin yhteensä enintään $50 + 55 = 105$ km ja vähintään $0 + 20 = 20$ km, mikä alkaa varmasti olla jo lähempänä totuutta kuin ensimmäinen arvio.



Tällä tavoin voimme jatkaa aikavälin pilkkomista ja matkan arvioimista maksimi- ja miniminopeuksien avulla. Mitä lyhyemmät välit, sitä tarkemmaksi arvio tulee. Kuljettu matka on itse asiassa täsmälleen tällaisen arvion raja-arvo välien pituuden lähestyessä nollaa.

Tämä tarkastelu voidaan yleistää koskemaan mitä tahansa jatkuvia funktioita. Ylä- ja ala-arvioita kutsutaan funktion *ylä- ja alasummiksi* ja näiden raja-arvoa funktion *integraaliksi*. Integraali kuvaa funktion *kertymää* tietyllä välillä. Jos funktio kuvaa jonkin suureen muutosnopeutta, integraali kertoo suureen arvon kokonaismuutoksen.

Määritelmä 8.1. Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio. Jaetaan väli tasaisesti korkeintaan h:n pituisiin suljettuihin osaväleihin. Valitaan jokaisella osavälillä funktion suurin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan näin saadut arvot yhteen. Kutsutaan saatua summaa funktion *yläsummaksi välillä* $[a, b]$ ja merkitään tätä S_h. (Funktion suurin arvo löytyy lauseen 7.16 nojalla.)

Valitaan samoin jokaisella osavälillä pienin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan tulokset yhteen. Kutsutaan tätä summaa funktion *alasummaksi välillä* $[a, b]$ ja merkitään s_h.

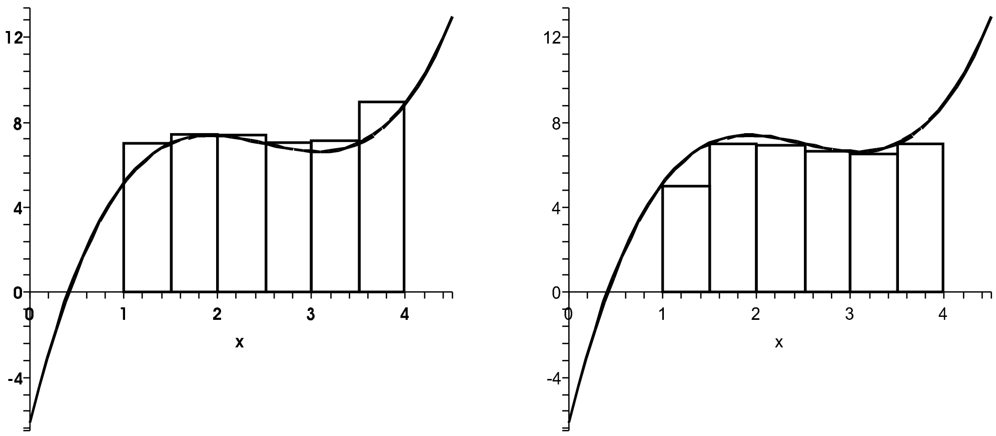
Funktion f *integraali välillä* $[a, b]$ on yläsumman ja alasumman raja-arvo osavälin pituuden h lähestyessä nollaa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} S_h = \lim_{h \to 0} s_h.$$

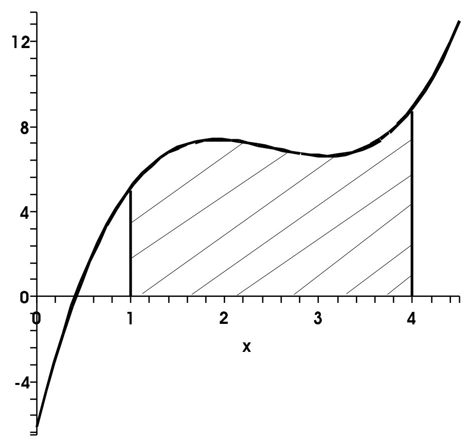
Tämä raja-arvo on aina olemassa, kun f on jatkuva välillä $[a, b]$.

Kaikki jatkuvat funktiot ovat *integroituvia* millä tahansa suljetulla välillä, eikä määritelmässä tarvitsisi tarkastella erikseen sekä ylä- että alasummia. Integraali voidaan kuitenkin määritellä muillekin kuin jatkuville funktioille. Jos funktio ei ole jatkuva, voi käydä niin, etteivät ylä- ja alasummat lähesty toisiaan h:n pienetessä. Tällöin funktio ei ole integroituva.

8.1. **Integraali kuvaajassa.** Ajatellaan integroimisväli jaetuksi tasaisesti osaväleihin. Funktion yläsumma on sellaisten suorakulmioiden pinta-alojen summa, joiden korkeus on jokaisella osavälillä funktion suurin arvo. Alasumma taas koostuu sellaisten suorakulmioiden pinta-aloista, joiden korkeus on joka osavälillä funktion pienin arvo.



Kun osavälin pituutta lyhennetään, lähestyvät funktion suurin ja pienin arvo tuolla välillä toisiaan (koska funktio on jatkuva). Siispä myös ylä- ja alasuorakulmioiden huiput kullakin välillä lähestyvät toisiaan ja funktion kuvaajaa, joka on niiden välissä. Lopulta suorakulmioiden huiput kohtaavat ja puristavat funktion arvon väliinsä. Tällöin niiden yhteenlaskettu pinta-ala, funktion integraali, vastaa *kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa.*



On kuitenkin huomioitava, että mikäli funktio on jollain välillä negatiivinen, on myös integraali negatiivinen.

8.2. **Integraalin laskeminen.** Integraalin laskeminen suoraan määritelmästä on yleensä erittäin vaikeaa. Siksi integroitaessa yleensä käytetäänkin niin kutsuttua *integraalifunktiota.*

Määritelmä 8.2. Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos $F' = f$.

Funktion integraalifunktion derivaatta on siis funktio itse. Integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen. Jos esimerkiksi $f(x) = 2$, niin integraalifunktioksi kelpaa yhtä hyvin $F(x) = 2x$ kuin $G(x) = 2x + 1$. Funktion eri integraalifunktiot ovat kuitenkin hyvin samankaltaisia.

Lause 8.3. *(Integraalilaskennan peruslause) Olkoon $F' = G' = f$, eli sekä F että G ovat funktion f integraalifunktioita. Tällöin $F = G + C$ jollain luvulla C.*

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat siis vakion lisäystä vaille samoja. Usein merkitäänkin

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

missä F on jokin funktion f integraalifunktio. Tämä integraalimerkintä ilman integroimisväliä tarkoittaa juuri integraalifunktiota. Vakio C on niin sanottu *integroimisvakio*, joka kuvaa sitä, ettei integraalifunktio ole yksikäsitteinen.

Esimerkki 8.4. Funktion $f(x) = x$ eräs integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Voidaan siis merkitä

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Koska derivaatta kuvaa funktion muutosnopeutta, ja integraali taas muutoksen aiheuttamaa kertymää, ovat integraali ja derivaatta eräässä mielessä toistensa vastakohtia. Kuljetun matkan derivaatta on kulkunopeus, kun taas kulkunopeuden integraalina saadaan kuljettu matka. Tähän perustuu seuraava lause.

Lause 8.5. *(Analyysin peruslause) Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio, ja F jokin sen integraalifunktio (eli $F' = f$.) Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

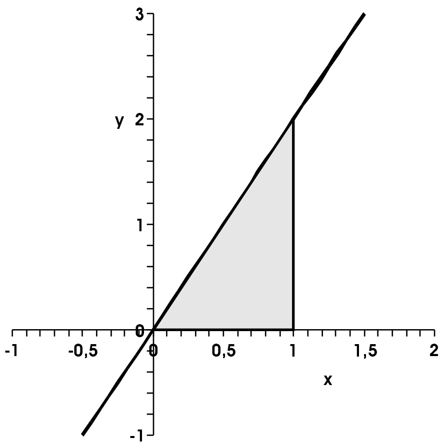
Usein merkitään

$$F(b) - F(a) = \Big/_{\!a}^{\,b} F(x).$$

Esimerkki 8.6. Olkoon $f(x) = 2x$. Eräs integraalifunktio on $F(x) = x^2$. Tällöin

$$\int_0^1 2x\,dx = \Big/_{\!0}^{\,1} x^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Tämä nähdään myös kuvaajasta. Integraali on varjostetun kolmion pinta-ala.



Huomio! Integroitaessa jotakin väliä voidaan valita mikä tahansa alkuperäisen funktion integraalifunktio, koska integroimisvakio supistuu kaavasta laskettaessa pois. Lasketaan äskeinen integraali käyttäen integraalifunktiota $F(x) = x^2 + C$, jossa C on integroimisvakio.

$$\int_0^1 2x\,dx = \Big/_0^1 x^2 + C = (1^2 + C) - (0^2 + C) = 1 + C - 0 - C = 1.$$

8.3. **Laskusääntöjä.**

1. $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Esimerkki 8.7. Olkoon $f(x) = 2x - 1/x^2$. Funktion $f_1(x) = 2x$ eräs integraalifunktio on $F_1(x) = x^2$ ja funktion $f_2(x) = -1/x^2$ eräs integraalifunktio on $F_2(x) = 1/x$. Nyt voidaan integroida

$$\begin{aligned}\int_1^2 2x - \frac{1}{x^2}\,dx &= \int_1^2 2x\,dx + \int_1^2 -\frac{1}{x^2}\,dx\\ &= \Big/_1^2 x^2 + \Big/_1^2 \frac{1}{x} = 2^2 - 1^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki 8.8. Olkoon $f(x) = |x|$. Lasketaan integraali osissa. Välillä $[-1, 0]$ $f(x) = -x$, joten integraalifunktioksi voidaan valita $F_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Toisaalta välillä $[0, 1]$ $f(x) = x$, joten integraalifunktioksi käy $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |x|\,dx &= \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx = \Big/_{-1}^0 -\frac{1}{2}x^2 + \Big/_0^1 \frac{1}{2}x^2\\ &= \left(-\frac{1}{2}\cdot 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1.\end{aligned}$$

Potenssin derivoimissäännöstä saadaan suoraan vastaava integroimissääntö. Olkoon $k \neq -1$. Tällöin

$$4. \quad \int_a^b x^k \, dx = \mathop{\Big/}_a^b \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

Jos taas funktiossa x^k eksponentti $k = -1$, niin funktio voidaan myös ilmaista muodossa $\frac{1}{x}$. Luonnollisen logaritmin derivointikaavan perusteella

$$5. \quad \int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \mathop{\Big/}_a^b \ln|x|.$$

On huomattava, että tämä integraali on määritelty ainoastaan, jos luku 0 ei osu a:n ja b:n välille, sillä funktiota x^{-1} ei ole nollassa määritelty.

Esimerkki 8.9. Integroidaan funktiota $f(x) = 1/x$ välillä $[1, e]$. Kun $x > 0$, funktiolla f on integraalifunktio $\ln x$.

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \mathop{\Big/}_1^e \ln x = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Integroidaan sitten samaa funktiota välillä $[-2, -1]$. Koska nyt $x < 0$, integraalifunktio on $\ln(-x)$.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx = \mathop{\Big/}_{-2}^{-1} \ln(-x) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}.$$

Funktio e^x on itse oma derivaattansa, jolloin pätee myös

$$6. \quad \int_a^b e^x \, dx = \mathop{\Big/}_a^b e^x.$$

Tätä e-kantaisen eksponenttifunktion integraalin ominaisuutta käytetään hyväksi *osittaisintegroinnissa*, luvun lopussa esiteltävässä integrointimenetelmässä.

Trigonometriset funktiot sini ja kosini integroituvat samaten helposti:

$$7. \quad \int_a^b \sin(x) \, dx = \mathop{\Big/}_a^b -\cos(x).$$

$$8. \quad \int_a^b \cos(x) \, dx = \mathop{\Big/}_a^b \sin(x).$$

Integroiminen on yleensä vaikeampaa kuin derivoiminen, koska tulon, osamäärän tai yhdistetyn funktion integroimiseen ei ole olemassa laskusääntöjä. Vastaavista derivoimissäännöistä on kuitenkin usein hyötyä.

Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$, joten funktio $f \circ g$ on funktion $(f' \circ g)g'$ integraalifunktio. Siispä

$$9. \int_a^b f'(g(x))g'(x) \, dx = \mathop{\Big/}_a^b (f \circ g)(x).$$

Esimerkki 8.10. Tarkastellaan lauseketta $x(x^2+1)^3$. Lausekkeessa esiintyy yhdistetty funktio, jonka sisäfunktio $g(x) = x^2+1$. Sisäfunktion derivaatta on $g'(x) = 2x$. Voimme saada lausekkeen säännön vaatimaan muotoon, kun tulkitsemme ulkofunktion erään funktion f derivaataksi: $f'(x) = x^3$, jolloin $f(x) = \frac{1}{4}x^4$. Tällöin nimittäin

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 g'(x)f'(g(x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big/_0^1 f(g(x)) = \frac{1}{2}\Big/_0^1 \frac{1}{4}(x^2+1)^4 \\ &= \frac{1}{8}\left[(1^2+1)^4-(0^2+1)^4\right] = \frac{1}{8}(16-1) = \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

Lukuunottamatta sääntöä numero 3 kaikki edelliset integroimiskaavat voidaan yleistää myös integraalifunktion muodostamiseen. Johdetaan vielä edellisen integroimissäännön ja kosinin derivaatan avulla tangentin integraali. Tangenttifunktio voidaan esittää muodossa

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Integraalia on suoraan kaavasta vaikea nähdä, mutta voidaan miettiä, olisiko tangenttifunktio tässä muodossa jonkin yhdistetyn funktion derivaatta (siis muotoa $f'(g(x))\cdot g'(x)$) – tällöinhän integraali saataisiin ko. yhdistetystä funktiosta. Tangenttifunktiossa esiintyy x sekä jakoviivan ylä- että alapuolella. Tällöin on luontevaa kokeilla, voisiko f' eli intergaalifunktion ulkofunktion derivaatta olla $\frac{1}{x}$, jolloin ”alkuperäinen” ulkofunktio olisi $\ln|x|$. Tässä tapauksessa sisäfunktio olisi $\cos(x)$ ja sisäfunktion derivaatta $-\sin(x)$. Tangenttifunktio saadaan siis melkein kirjoitettua auki yhdistetyn funktion derivaataksi muodossa

$$\frac{1}{\cos(x)}\cdot -\sin(x).$$

Tämä poikkeaa tangenttifunktiosta vain etumerkiltään:

$$\frac{1}{\cos(x)}\cdot -\sin(x) = -\tan(x).$$

Koska

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)\,dx = \Big/_a^b (f\circ g)(x)$$

ja tässä tapauksessa $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \cos(x)$ ja $g'(x) = -\sin(x)$, niin

$$\int_a^b -\tan(x) = \int_a^b \frac{1}{\cos(x)}\cdot -\sin(x) = \Big/_a^b \ln|cos(x)|.$$

Säännön numero 2 nojalla vakiolla kerrotun funktion integraali on sama kuin funktion integraali kerrottuna ko. vakiolla, joten

$$\int_a^b -\tan(x) = -\int_a^b \tan(x).$$

Näin ollen saadaan aiemmasta kaavasta kertomalla -1:llä ja käyttämällä sääntöä numero 2

$$\int_a^b \tan(x) = \int_a^b -\frac{1}{\cos(x)}\cdot -\sin(x) = \Big/_a^b -\ln|cos(x)|.$$

Samantapaisilla menetelmillä voidaan mm. todistaa, että

$$\int_a^b c^x = \underset{a}{\overset{b}{/}} \frac{1}{\ln c} \cdot c^x$$

sekä

$$\int_a^b \ln x = \underset{a}{\overset{b}{/}} x \cdot \ln x - x,$$

joista jälkimmäinen pätee tietenkin vain positiivisilla arvoalueilla. Näiden integraalien löytäminen ei ole niinkään helppoa, mutta kaavojen todistaminen derivoimalla on jokseenkin mekaaninen toimenpide.

8.4. **Sovelluksia.** Integraalilla voidaan laskea jonkin suureen kertymää.

Esimerkki 8.11. Metsän kasvit käyttävät auringonpaisteesta saamaansa energiaa. Energian mittausta varten metsään on asetettu mittalaitteita, jotka mittaavat auringonpaisteen tehoa eli energiavuota. Mitä kirkkaampi paiste, sitä suurempi mittalaitteen lukema. Erään tällaisen mittalaitteen lukema noudatti aikavälillä $[12, 13]$ melko tarkasti funktiota $P(t) = -3{,}6t^2 + 94t - 500$ (kJ/h). Tällä aikavälillä laitteen vastaanottama energia on energiavuon kertymä, joten se saadaan integroimalla

$$\begin{aligned} E &= \int_{12}^{13} -3{,}6t^2 + 94t - 500\, dt = \underset{12}{\overset{13}{/}} \left(-1{,}2t^3 + 47t^2 - 500t\right) \\ &= \left(-1{,}2 \cdot 13^3 + 47 \cdot 13^2 - 500 \cdot 13\right) - \left(-1{,}2 \cdot 12^3 + 47 \cdot 12^2 - 500 \cdot 12\right) \approx 110 \text{ (kJ)}. \end{aligned}$$

Integraalia voidaan myös käyttää geometrisenä työkaluna, koska se kertoo kuvaajan ja x-akselin välisen pinta-alan.

Esimerkki 8.12. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$. Mikä on tämän funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[-1, 1]$?

Ensinnäkin on muistettava, että jos funktio on negatiivinen jollain välillä, myös sen integraali on negatiivinen kyseisellä välillä. Funktio f on negatiivinen välillä $[-1, 0[$. Pinta-alan laskemiseksi on siis jaettava väli kahteen osaan: $[0, 1]$ ja $[-1, 0]$. Näiden alat voidaan nyt laskea integroimalla:

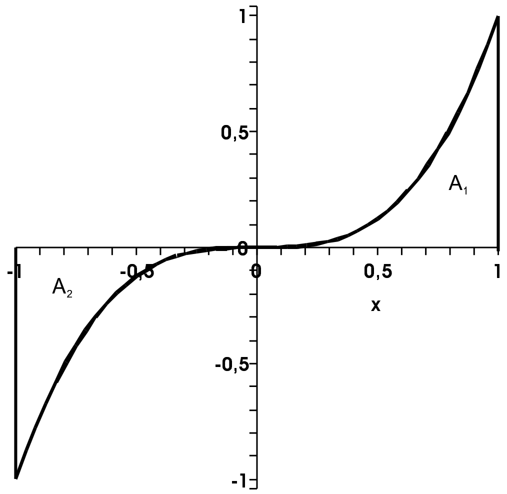
$$A_1 = \int_0^1 x^3\, dx = \underset{0}{\overset{1}{/}} \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

ja

$$A_2 = -\int_{-1}^0 x^3\, dx = -\underset{-1}{\overset{0}{/}} \frac{1}{4}x^4 = -\left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Nämä alat yhdistämällä saadaan lopulta kysytyksi pinta-alaksi

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



Esimerkki 8.13. Samaten joudutaan toimimaan funktion $f(x) = \sin(x)$ kanssa, jos sen ja x-akselin väliin jää aluetta vuoroin positiivisella, vuoroin negatiivisella puolella. Lasketaan ko. funktion ja x-akselin väliin jäävä ala välillä $[-\pi, \pi]$.

Sinifunktio on tarkastelualueella negatiivinen, kun $x < 0$, ja positiivinen, kun $x > 0$. Pinta-alan laskemiseksi on taas jaettava väli kahteen osaan, tällä kertaa $[0, \pi]$ ja $[-\pi, 0]$. Näiden alat lasketaan integroimalla:

$$A_1 = \int_0^\pi \sin(x)\,dx = \Big/_{\!0}^{\pi} -\cos(x) = 1 - (-1) = 2,$$

ja myös

$$A_2 = -\int_{-\pi}^0 \sin(x)\,dx = -\Big/_{\!-\pi}^{0} -\cos(x) = 1 - (-1) = 2.$$

Koko pinta-ala on tällöin

$$A = A_1 + A_2 = 2 + 2 = 4.$$

Esimerkki 8.14. Tutkitaan pyörähdyskappaletta, joka syntyy, kun jonkin funktion $f(x)$ kuvaaja pyörähtää syvyyssuunnassa x-akselin ympäri ja näin saadun pinnan sisään jäävä tila vielä "katkaistaan päistä" kahdella x-akseliin nähden kohtisuorassa olevalla tasolla kohdissa A ja B. Ollaan siis tavallaan "sorvattu" A:n ja B:n välillä olevasta palikasta pyörähdyskappale funktion $f(x)$ muotoisella terällä.

Ympyrän alan kaavasta πr^2 saadaan seuraava tulos: mainitun pyörähdyskappaleen poikkipinta-ala kohdassa x on $\pi f(x)^2$. Kappaleen tilavuus saadaan poikkipinta-alan kertymänä välillä [A, B] eli integroimalla $\pi f(x)^2$ A:sta B:hen. Otetaan esim. selville funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajan välille [1,2] muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \pi \int_1^2 x^{-2}\,dx = \pi \Big/_{\!1}^{2} -x^{-1} \\ &= \pi \Big/_{\!1}^{2} -\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = \frac{1}{2}\pi,$$

8.5. **Epäjatkuvan funktion integraalista.** Integraali voidaan helposti yleistää koskemaan myös epäjatkuvia funktioita. Määritelmässä käytettyä arviointia täytyy kuitenkin hieman muuttaa, sillä epäjatkuva funktio ei välttämättä saavuta pienintä tai suurinta arvoa suljetulla välillä. Lisäksi voi käydä niin, etteivät yläsumma ja alasumma lähestykään samaa lukua osaväliä lyhennettäessä. Tällöin funktio ei ole integroituva.

Useimmilla epäjatkuvilla funktioilla ei ole integraalifunktiota, joten integraalit on laskettava muulla tapaa. Toisaalta voi myös käydä niin, että integraalifunktio on olemassa, mutta funktio ei esimerkiksi ole rajoitettu, jolloin se ei ole integroituva. Epäjatkuvien funktioiden kanssa täytyy siis olla joka suhteessa tarkkana, mutta usein integrointi kuitenkin onnistuu.

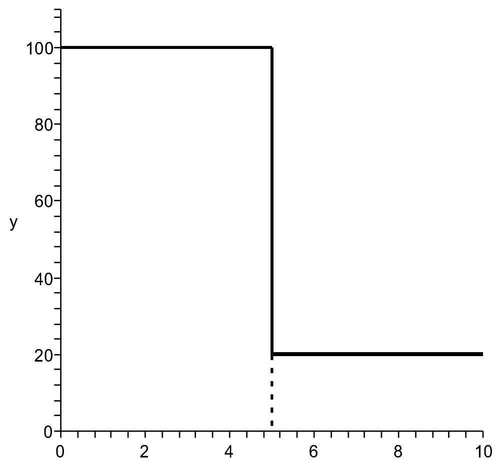
Esimerkki 8.15. Ennen kuin auringonpaistetta mittaavat laitteet vietiin metsään, niitä testattiin laboratoriossa. Laite asetettiin kirkkaan lampun alle kymmeneksi sekunniksi, ja viiden sekunnin kohdalla valo katkaistiin. Mittalaite kuitenkin rekisteröi vielä huoneen ikkunoista tulevan valon.

Olkoon mittalaitteen $P : [0, 10] \to \mathbb{R}$ mittalaitteen lukema ajan funktiona. Tällöin

$$P(t) = \begin{cases} 100, & \text{kun } 0 \leq t \leq 5 \\ 20, & \text{kun } 5 < t \leq 10 \end{cases} \quad \text{(J/s).}$$

Funktio P on epäjatkuva eikä se ole minkään funktion derivaatta. Sillä ei siis ole integraalifunktiota. Se on kuitenkin integroituva, joten voimme integroida sen osissa. Kummallakin osalla funktiolla on integraalifunktio, joten

$$\begin{aligned}\int_0^{10} P(t)\,dt &= \int_0^5 P(t)\,dt + \int_5^{10} P(t)\,dt = \int_0^5 100\,dt + \int_5^{10} 20\,dt \\ &= \Big/_{0}^{5} 100t + \Big/_{5}^{10} 20t = (500 - 0) + (200 - 100) = 600 \text{ (kJ).}\end{aligned}$$



8.6. **Osittaisintegrointi.** Tulon derivointisäännön mukaan $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, joten funktio fg on funktion $f'g + fg'$ integraalifunktio. Siispä

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = \Big/_{a}^{b} f(x)g(x),$$

josta edelleen saadaan

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \mathop{\Big/}_{a}^{b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Tätä integroimismenetelmää kutsutaan *osittaisintegroinniksi*. Osittaisintegrointi soveltuu erityisen hyvin sellaisten funktioiden integrointiin, joissa kertoimena on eksponenttifunktio.

Esimerkki 8.16. Olkoon $h(x) = e^x x$. Merkitään $f(x) = e^x$ ja $g(x) = x$. Tällöin $f'(x) = e^x$ ja $g'(x) = 1$, joten osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{x}_{g}\,dx &= \mathop{\Big/}_{0}^{1} \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{x}_{g} - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'}\,dx \\ &= (e^1 - 0) - \mathop{\Big/}_{0}^{1} e^x = e - (e^1 - e^0) = 1. \end{aligned}$$

Osittaisintegrointi auttaa, koska eksponenttifunktion derivaatta on sama kuin funktio itse, jolloin kaavan oikealle puolelle tulee helpompi funktio integroitavaksi.

Esimerkki 8.17. Osittaisintegroimalla voidaan periaatteessa integroida mikä tahansa polynomin ja eksponenttifunktion tulo. Olkoon $h(x) = e^x(x^2 - 1)$. Osittaisintegroimalla kahdesti saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x(x^2 - 1)\,dx &= \mathop{\Big/}_{0}^{1} e^x(x^2 - 1) - \int_0^1 e^x 2x\,dx \\ &= (0 - (-e^0)) - \left(\mathop{\Big/}_{0}^{1} e^x 2x - \int_0^1 e^x \cdot 2\,dx \right) \\ &= 1 - \left((2e^1 - 0) - \mathop{\Big/}_{0}^{1} 2e^x \right) = 1 - (2e - (2e - 2)) = -1. \end{aligned}$$

9. Differentiaaliyhtälöt

Useissa tilanteissa jonkin suureen muutosnopeus jollain hetkellä riippuu suureen arvosta. Voi myös tapahtua, että esim. muutosnopeuden kiihtyvyys riippuu suureen arvosta ja muutosnopeudesta. Tämän tyyppisissä tilanteissa, jos riippuvuus tunnetaan, voidaan tilannetta kuvata *differentiaaliyhtälöllä*. Differentiaaliyhtälössä esiintyy tuntematon suure sekä sen derivaattoja.

Ajatellaan esimerkiksi uunissa lämmitettävää paistia. Olkoon paistin lämpötila ajan funktiona $T(t)$. Mitä lämpimämmäksi paisti tulee uunissa, sitä enemmän se säteilee lämpöä pois, jolloin lämpeneminen hidastuu. Oletetaan hieman yksinkertaistaen, että paistin lämpenemisnopeus on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen erotukseen, verrannollisuuskertoimena k. (Mitä lähempänä uunin lämpötilaa paistin lämpötila on, sitä hitaammin se lämpenee.) Jos uunin lämpötila on 200 astetta, tällaista riippuvuutta kuvaa differentiaaliyhtälö

$$T'(t) = k(200 - T(t)).$$

Tällaisesta yhtälöstä halutaan ratkaista lämpötila, joka on *ajan funktio*. Differentiaaliyhtälössä on yleensäkin ratkaistavana tuntematon funktio, ei luku. Siksi differentiaaliyhtälöt poikkeavat ratkaisumenetelmiltään suuresti algebrallisista yhtälöistä (tavalliset yhtälöt).

Differentiaaliyhtälöiden yhteydessä käytetään usein tiettyjä vakiintuneita merkintöjä. Tuntematonta funktiota merkitään yleensä y ja sen derivaattoja y', y'' jne. Funktion muuttujana voi olla x, mutta hyvin usein myös t, varsinkin jos funktio kuvaa jotain ajasta riippuvaa suuretta. Tällöin voi olla jopa niin, että funktiota merkitään x:llä, esimerkiksi $x(t) = t^2$. Yhtälöissä jätetään usein merkitsemättä funktion muuttuja, ei siis merkitä $y(x)$ vaan yksinkertaisesti y.

Määritelmä 9.1. Yhtälöä, jossa esiintyy tuntemattoman funktion y derivaatta tai korkeampia derivaattoja, kutsutaan *differentiaaliyhtälöksi* (DY). Differentiaaliyhtälön ratkaisu on mikä tahansa funktio, joka y:n paikalle sijoitettuna toteuttaa yhtälön. Yhtälön *kertaluku eli aste* on korkeimman siinä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Esimerkki 9.2. Differentiaaliyhtälöitä:

$$\begin{aligned} &y' = 0 \quad \text{(1. aste)},\\ &y'' + 2xy = \sqrt{x} \quad \text{(2. aste)},\\ &y''y = \frac{x}{\sqrt{y'''}} \quad \text{(3. aste)}. \end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu ei ole yleensä yksikäsitteinen, vaan moni funktio voi toteuttaa saman yhtälön. Tällöin tarvitaan jotain lisätietoa, jotta funktio voitaisiin ratkaista yksikäsitteisesti. Tyypillinen lisätieto on *alkuarvoehto*. Aikaisemmassa esimerkissä alkuarvoehto olisi esimerkiksi paistin lämpötila ennen uuniin laittamista, eli $T(0) = 21$ °C. Tämä lisätieto riittää ratkaisemaan paistin lämpötilaa kuvaavan funktion yksikäsitteisesti (jos uunin lämmitystehoa kuvaava verrannollisuuskerroin k oletetaan vakioksi).

Differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa joudutaan etsimään funktioiden integraalifunktioita. Tämän vuoksi ratkaisemista kutsutaan joskus yhtälön *integroimiseksi*. Integraalifunktiota etsittäessä on muistettava, että integraalifunktio ei ole koskaan yksikäsitteinen. Eri integraalifunktiot voivat poiketa toisistaan integroimisvakiolla, joka on otettava huomioon.

Esimerkki 9.3. Yksinkertainen esimerkki differentiaaliyhtälöstä on

$$y' = 2x.$$

Tämä yhtälö voidaan heti ratkaista etsimällä funktion $2x$ integraalifunktio. Eräs ratkaisu on $y(x) = x^2$. Lisäksi integraalilaskennan peruslauseen mukaan kaikki ratkaisut saadaan tästä lisäämällä jokin vakio. Yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$y(x) = \int 2x\,dx + C = x^2 + C.$$

Luku C on integroimisvakio, ja jokaisella eri C:n arvolla saadaan uusi ratkaisu.

Esimerkki 9.4. Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - 2y' + y = x.$$

Tämä on toisen asteen differentiaaliyhtälö. Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = e^x + x + 2$, sillä sen derivaatat ovat

$$y'(x) = e^x + 1 \quad \text{ja} \quad y''(x) = e^x,$$

joten yhtälöön sijoittamalla saadaan

$$y'' - 2y' + y = e^x - 2(e^x + 1) + (e^x + x + 2) = x.$$

Esimerkki 9.5. Tarkastellaan toisen kertaluvun yhtälöä

$$y''y' = x.$$

Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = \frac{1}{2}x^2$, sillä tämän derivaatat ovat

$$y'(x) = x \quad \text{ja} \quad y''(x) = 1,$$

joten

$$y''y' = 1 \cdot x = x.$$

Tässä tapauksessa yhtälön ratkaisuja ovat myös funktiot $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, joissa C on mielivaltainen vakio, sillä se ei näy derivaatoissa. Huomaa, että tässä esimerkissä ei ole mukana itse funktiota, jolloin ko. vakio ei esiinny yhtälössä. Edellisen esimerkin tilanne oli sikäli monimutkaisempi.

Usein suuretta kuvaavasta funktiosta tiedetään sen toteuttaman differentiaaliyhtälön lisäksi joitakin yksittäisiä arvoja. Nämä auttavat funktion määrittämisessä.

Määritelmä 9.6. Ongelmaa, jossa yritetään ratkaista tuntematon funktio, kutsutaan *alkuarvo-ongelmaksi eli alkuarvotehtäväksi* (AAT), jos tiedetään

1) jokin y:n toteuttama differentiaaliyhtälö, sekä
2) y:n sekä sen derivaattojen arvot jossain (samassa) pisteessä $(n-1)$:nteen derivaattaan asti, missä n on yhtälön kertaluku.

Esimerkki 9.7. Eksponenttifunktion tavallisin ja yksinkertaisin määritelmä on esimerkki alkuarvo-ongelmasta:

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Etsitään siis funktio, joka on itse oma derivaattansa ja jonka arvo lähtöarvolla 0 on 1. (Tämä vastaa potenssiopin mukaisesti sitä, että $e^0 = 1$.) Tämän määritelmän mukaan alkuarvotehtävän ainoa ratkaisu on $y(x) = e^x$. Tehtävän differentiaaliyhtälön toteuttaa kuitenkin mikä hyvänsä funktio $y(x) = n \cdot e^x$, missä n on vakio, koska funktion vakiokerroin ei derivoitaessa tai interoitaessa muutu. Näistä funktioista ainoa, joka toteuttaa alkuarvoehdon, on se jossa $n = 1$, sillä

$$y(0) = 1 \iff n \cdot e^0 = 1 \iff n \cdot 1 = 1 \iff n = 1.$$

Esimerkki 9.8. Kappale liikkuu x-akselilla. Merkitään kappaleen sijaintia ajan funktiona $x(t)$. (Tällöin kappaleen nopeus on $x'(t)$ ja kiihtyvyys $x''(t)$.) Oletetaan, että kappaleen kiihtyvyys on koko ajan 1, eli

$$x''(t) = 1.$$

Tämä toisen kertaluvun DY on helppo ratkaista. (Ratkaistaan siis $x(t)$ eli kappaleen sijainti ajanhetkellä t.) Koska x' on x'':n integraalifunktio, nähdään että

$$x'(t) = \int x''(t)\,dt = \int 1\,dt = t + V,$$

missä V on integroimisvakio. Toisaalta x on x':n integraalifunktio, joten

$$x(t) = \int x'(t)\,dt = \int t + V\,dt = \frac{1}{2}t^2 + Vt + S,$$

missä S on toinen integroimisvakio. Mikään muu funktio ei toteuta kyseistä yhtälöä.

Oletetaan sitten lisäksi, että kappale lähti pisteestä 2 nopeudella 3 oikealle päin, eli

$$x(0) = 2 \quad \text{ja} \quad x'(0) = 3.$$

Nyt ratkaistavana on alkuarvotehtävä. Ensimmäisen alkuarvoehdon mukaan

$$x(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + V \cdot 0 + S = 2,$$

josta saadaan $S = 2$. Toisen alkuarvoehdon mukaan

$$x'(0) = 0 + V = 3,$$

joten $V = 3$. Integroimisvakioista V siis vastaa kappaleen alkunopeutta (siis nopeutta hetkellä $t = 0$) ja S alkusijaintia. Saatu funktio on itse asiassa mekaniikasta tutun tasaisesti kiihtyvän liikkeen kaavan erikoistapaus kiihtyvyydellä 1. Alkuarvotehtävän yksikäsitteinen ratkaisu on nyt

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 2.$$

Esimerkki 9.9. Aina alkuarvoehtokaan ei riitä yhtälön yksikäsitteiseen ratkaisemiseen. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Heti nähdään, että $y_1(x) = 0$ toteuttaa yhtälön ja alkuarvoehdon, joten se on eräs ratkaisu. Toisaalta myös $y_2(x) = x^2/4$ on ratkaisu. Tämän derivaatta on nimittäin $y_2'(x) = x/2$, joten

$$y_2' = \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \sqrt{y_2},$$

ja lisäksi $y_2(0) = 0$.

9.1. **Separoituvat differentiaaliyhtälöt.** Ns. separoituvia differentiaaliyhtälöitä esiintyy käytännön tilanteissa melko usein, ja niiden ratkaisumenetelmä on yksinkertainen.

Määritelmä 9.10. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä kutsutaan *separoituvaksi*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$g(y)y' = h(x),$$

missä g on funktiota y sisältävä lauseke, jossa ei esiinny muuttujaa x (paitsi funktion y muuttujana) ja h x:ää sisältävä lauseke, jossa ei esiinny tuntematonta funktiota y.

Esimerkki 9.11.

a) Yhtälö

$$2yy' = x^2$$

on separoituva. Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$.

b) Myös yhtälö

$$y' = (x+2)y^2$$

on separoituva, jos $y \neq 0$, sillä se voidaan tällöin jakaa puolittain y^2:lla, jolloin saadaan

$$\frac{y'}{y^2} = x + 2.$$

Tässä $\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y^2} \cdot y'$, joten $g(y) = \frac{1}{y^2}$ ja $h(x) = x + 2$.

c) Yhtälö

$$y' + 2y = x$$

ei ole separoituva, sillä se ei ole vaadittua muotoa, eikä sitä voi muuttaa vaadittuun muotoon.

Separoituvan differentiaaliyhtälön $g(y)y' = h(x)$ ratkaiseminen perustuu yhdistetyn funktion derivointisääntöön. Tulkitaan g funktioksi, siis siten, että funktiota y pidetään sen muuttujana. (Tällöin $g(y)$ on yhdistetty funktio.) Olkoon G jokin funktion g integraalifunktio, ja H jokin funktion h integraalifunktio. Koska $G' = g$, voidaan yhtälö kirjoittaa muotoon

$$G'(y(x))y'(x) = h(x).$$

Tässä x:n funktiot on kirjoitettu "auki", x:t näkyviin, jotta yhdistetyn funktion derivointisäännön käyttö olisi helpompi hahmottaa. Yhtälön vasemmalla puolella on nyt yhdistetty funktio $G'(y(x))$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $y'(x)$. Yhdistetyn funktion derivointisäännön mukaan

$$D\ G(y(x)) = G'(y(x))y'(x),$$

eli edellisen yhtälön vasen puoli on yhdistetyn funktion $G(y(x))$ derivaatta, ja eräs sen integraalifunktio on $G(y(x))$. *Tämä saadaan $G'(y)$:stä integroimalla y:n suhteen, kuten yhdistetyn funktion derivaatan osa $G'(y)$:kin saadaan G:stä derivoimalla y:n suhteen eli niin kuin y olisi muuttuja!* Toisaalta oikean puolen eräs integraalifunktio on $H(x)$. Koska analyysin peruslauseen mukaan saman funktion integraalifunktiot voivat poiketa toisestaan vain vakiolla, saadaan integroimalla yhtälön molemmat puolet (eli *integroimalla puolittain*)

$$G(y) = H(x) + C.$$

Tästä tuloksesta ratkaistaan vielä yleensä y, jos se on mahdollista.

Esimerkki 9.12. Ratkaistaan yhtälö

$$2yy' = x^2.$$

Tässä $g(y) = 2y$, ja g:n eräs integraalifunktio on $G(y) = y^2$. Oikean puolen eräs integraalifunktio on puolestaan $H(x) = \frac{1}{3}x^3$. Ratkaisuksi saadaan

$$y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Tästä voidaan vielä ratkaista y. Neliöjuuren takia täytyy ottaa huomioon positiiviset ja negatiiviset ratkaisut.

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C}.$$

Usein yhtälön muuttaminen separoituvaan muotoon vaatii lisäoletuksia, jotka esim. kaventavat y:n maalijoukkoa. Kun tutkitaan yhtälöä ensin ilman näitä lisäoletuksia, saattaa löytyä lisäratkaisuja. Tällaisia ratkaisuja, jotka löytyvät ennen kuin yhtälö on separoituvassa muodossa, kutsutaan *erillisratkaisuiksi*.

Esimerkki 9.13. Ratkaistaan yhtälö

$$y' = y^2.$$

Jotta yhtälö saataisiin separoituvaan muotoon, täytyy se jakaa puolittain y^2:lla. Tällöin ei saa olla $y = 0$. Toisaalta myös funktio $y(x) = 0$ toteuttaa yhtälön, joten se on erillisratkaisu.

Oletetaan sitten, että $y \neq 0$. Tällöin saadaan

$$y^{-2}y' = 1.$$

Etsitään molemmille puolille integraalifunktiot:

$$\int y^{-2}y'\,dx = \int 1\,dx$$
$$\iff -y^{-1} = x + C.$$

Ratkaistaan vielä y:

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Tämä ratkaisu ei saa koskaan arvoa 0, niin kuin oletettiinkin. Yhtälön ratkaisuja ovat siis erillisratkaisun lisäksi kaikki separoimalla saadut ratkaisut:

$$y(x) = 0 \quad \text{tai} \quad y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Separoimismenetelmällä voidaan ratkaista ***eksponentiaalisen kasvun malliin*** liittyvät yhtälöt. Eksponentiaalisen kasvun malleissa suureen kasvunopeus on suoraan verrannollinen suureen arvoon, ja ratkaisu on aina jonkinlainen eksponenttifunktio. Verrannollisuuskerroin on usein tuntematon, joten sen ratkaisemiseen tarvitaan jokin lisätieto.

Esimerkki 9.14. Radioaktiivisen hajoamisen nopeus on suoraan verrannollinen hajoavan aineen määrään. Oletetaan, että hajoavaa ainetta on alussa 100 kg, ja vuoden päästä enää 50 kg. Muodostetaan systeemiä kuvaava alkuarvotehtävä:

$$m(t)' = km(t), \quad m(0) = 100,$$

missä m on jäljellä olevan aineen massa kuluneen ajan (t, vuosia) funktiona ja k aineen aktiivisuutta kuvaava verrannollisuuskerroin. Yhtälö on separoituva, jos $m \neq 0$. Erillisratkaisu $m(t) = 0$ ei toteuta alkuarvoehtoa, joten se hylätään. Voidaan siis olettaa, että $m \neq 0$, jolloin saadaan

$$\frac{m'}{m} = k.$$

Vasemmalla puolella ulkofunktiona on $\frac{1}{m}$. Koska m on aina positiivinen (aineen määrä), integraalifunktioksi tulee $\ln m$. Oikean puolen integraalifunktio on kt. Siis

$$\ln m(t) = kt + C.$$

Tästä saadaan ratkaistua m eksponenttifunktion avulla (logaritmin laskusääntöjen mukaan $e^{\ln x} = x$):

$$m(t) = e^{\ln m(t)} = e^{kt+C} = e^C e^{kt}.$$

Merkitään vielä vakiota $e^C = m_0$. Alkuarvoehdon mukaan

$$m(0) = m_0 e^0 = 100,$$

joten $m_0 = 100$. Se kuvaakin aineen massaa alussa. Alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$m(t) = 100e^{kt}.$$

Verrannollisuuskerroin k on vielä tuntematon. Tämä saadaan ratkaistuksi annetun lisätiedon avulla. 1 Vuoden kuluttua ainetta oli enää 50 kg eli

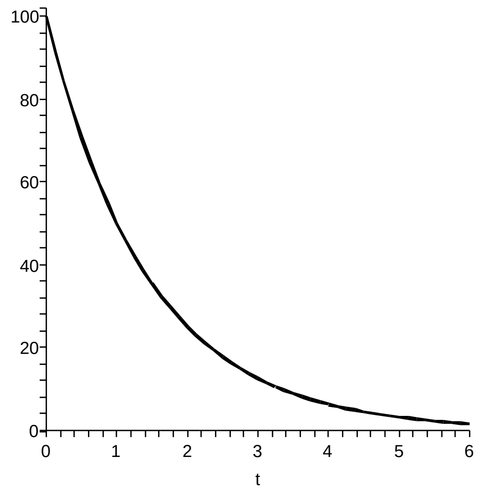
$$m(1) = 100e^{k\cdot 1} = 100e^k = 50,$$

josta saadaan säännön $\ln e^x = x$ avulla ottamalla kummaltakin puolelta logaritmi

$$e^k = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \iff k = \ln\frac{1}{2} \approx -0{,}693.$$

Aineen määrää kuvaava funktio on siis likimäärin

$$m(t) = 100e^{-0{,}7t}.$$



Esimerkki 9.15. Ratkaistaan paistin paistamiseen liittyvä alkuarvotehtävä. Paistin lämpenemisnopeus on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen erotukseen. Lisäksi alussa paisti oli huoneenlämpöinen. Näin saadaan alkuarvotehtävä:

$$T' = k(200 - T), \quad T(0) = 21.$$

Muutetaan yhtälö separoituvaan muotoon. Koska alkuhetkellä $T = 21$, erillisratkaisu $T = 200$ ei tule kyseeseen. Saadaan

$$\frac{T'}{200 - T} = \frac{1}{200 - T} \cdot T' = k.$$

Integroidaan puolittain. Vasemman puolen ulkofunktio on $g(T) = \frac{1}{200-T}$. (Tämäkin on yhdistetty funktio.) Separoituvan yhtälön ratkaisumenetelmän mukaan meidän on nyt selvitettävä $G(T)$, jonka derivaatta $g(T)$ on, jos muuttujaksi otetaan T. Integroidaan siis T:n suhteen $g(T)$ muokkaamalla se puolestaan muotoon, jossa se voidaan tulkita yhdistetyn funktion derivaataksi:

$$\int \frac{1}{200 - T}\, dT = -\int -1 \cdot \frac{1}{200 - T}\, dT = -\ln|200 - T| + C,$$

Koska paisti on uunia kylmempi, $200 - T$ on aina positiivinen, jolloin

$$-\ln|200 - T| + C = -\ln(200 - T) + C$$

Oikean puolen integraalifunktio on puolestaan kt. Saadaan siis

$$\ln(200 - T) = -kt + C.$$

Tästä voidaan ratkaista T eksponenttifunktion avulla:

$$200 - T = e^{\ln(200-T)} = e^{-kt+C} = e^C e^{-kt}.$$

Korvataan vakio e^C vakiolla T_0, jolloin

$$T = 200 - T_0 e^{-kt}.$$

Alkuarvoehdon mukaan

$$T(0) = 200 - T_0 e^0 = 21,$$

josta

$$T_0 = 200 - 21 = 179.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$T(t) = 200 - 179e^{-kt}.$$

Verrannollisuuskerroin voitaisiin ratkaista jostain lisätiedosta, esim. tiedosta, minkä lämpöinen paisti oli tunnin päästä. Huomaa, että tässä T_0 oli abstrakti vakio, siis ei paistin alkulämpötilaa kuvaava luku!

Kerrataan vielä separoituvan yhtälön ratkaisumenetelmän vaiheet.

1) Muutetaan yhtälö separoituvaan muotoon $g(y)y' = h(x)$. Tässä vaiheessa saattaa löytyä erillisratkaisuja.
2) Etsitään vasemman puolen ulkofunktiolle g integraalifunktio G (integroimalla y:n suhteen).
3) Etsitään funktion h integraalifunktio H.
4) Tuloksesta $G(y) = H(x) + C$ ratkaistaan y (jos mahdollista).

10. Lineaariset yhtälöryhmät ja matriisit

Kurssin loppuosassa tutustutaan lineaarisiin yhtälöryhmiin sekä niiden ratkaisemiseen matriisien avulla.

10.1. Lineaariset yhtälöryhmät ja niiden ratkaiseminen.

Määritelmä 10.1. Yhtälöä

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

missä $a_1, \ldots, a_n$ sekä b ovat vakioita ja $x_1, \ldots, x_n$ ovat tuntemattomia, kutsutaan *n:n muuttujan lineaariseksi yhtälöksi.* Jos liitetään yhteen m kappaletta lineaarisia yhtälöitä, joissa on samat tuntemattomat, saadaan *lineaarinen yhtälöryhmä*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \qquad\vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}.$$

Lukuja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi.* Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä $x, y, z, \ldots$. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään n kappaletta lukuja, jotka tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ paikalle sijoitettuina toteuttavat kaikki m yhtälöä.

Esimerkki 10.2. Lineaarisia yhtälöryhmiä:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - y + z & = & -2 \\ -3x + 2y - z & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 & & +4x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & 12 \end{cases}.$$

Ensimmäisen yhtälöryhmän ratkaisu on $x = 3/2$, $y = -1/2$. Toisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, kuten myöhemmin nähdään.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen on monta menetelmää, joista käytetyin on niin sanottu *Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä.* Sen päävaiheet, jotka toistetaan jokaisen yhtälön kohdalla ensimmäisestä alkaen, ovat:

- Jaetaan yhtälö puolittain, jotta yhtälön ensimmäisen tuntemattoman kertoimeksi saadaan 1.
- Eliminoidaan tämän tuntemattoman avulla vastaavat tuntemattomat kaikista muista yhtälöistä.

Käydään tätä menetelmää läpi esimerkkien avulla.

Esimerkki 10.3. Olkoon ratkaistavana seuraava yhtälöpari:

$$\begin{cases} 2x + 4y &= 2 \\ x + 3y &= -1 \end{cases}.$$

Jaetaan ensimmäinen yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin ensimmäiseksi kertoimeksi tulee 1:

$$\begin{cases} x + 2y &= 1 \\ x + 3y &= -1 \end{cases}.$$

Toisen yhtälön ensimmäinen kerroin on 1. Lisätään ensimmäinen yhtälö toiseen puolittain -1:llä kerrottuna. Tällöin toisesta yhtälöstä häviää x:

$$(-1)(x + 2y) + (x + 3y) = (-1) \cdot 1 + (-1) \iff y = -2.$$

Nyt yhtälöryhmä on siis

$$\begin{cases} x & +2y & = & 1 \\ & y & = & -2 \end{cases}.$$

(Ensimmäinen yhtälö pidetään muuttamattomana.)

Jatketaan ratkaisua eliminoimalla vielä ensimmäisestä yhtälöstä y. Toisen yhtälön ensimmäinen kerroin on jo 1. Ensimmäisessä yhtälössä y:n kerroin on 2. Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö siis puolittain -2:lla ja lisätään ensimmäiseen, jolloin:

$$\begin{cases} x & +2y & = & 1 & \mid \leftarrow \\ & y & = & -2 & \mid \cdot (-2) \end{cases} \iff \begin{cases} x & & = & 5 \\ & y & = & -2 \end{cases}.$$

Nyt yhtälöryhmä on täysin ratkaistussa muodossa, josta voidaan suoraan lukea tuntemattomien arvot. Tarkistetaan vielä tämä vastaus sijoittamalla saadut arvot alkuperäisiin yhtälöihin:

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) = 10 - 8 & = & 2 \\ 5 + 3 \cdot (-2) = 5 - 6 & = & -1 \end{cases}.$$

Tulos on oikea.

Esimerkki 10.4. Ratkaistaan seuraava kolmen yhtälön yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 12 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{cases}.$$

Jaetaan ensimmäinen yhtälö 2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 12 & \mid : 2 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 & \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 & \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{cases}.$$

Lisätään sitten ensimmäinen yhtälö toiseen -3:lla kerrottuna ja kolmanteen -2:lla kerrottuna:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 & \mid \cdot (-3) & \mid \cdot (-2) \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 & \mid \leftarrow & \mid \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 & & \mid \leftarrow \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ & -5x_2 & -10x_3 & = & -20 \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 \end{cases}.$$

Nyt on eliminoitu ensimmäinen tuntematon toisesta ja kolmannesta yhtälöstä. Toisen yhtälön ensimmäinen kerroin on nyt -5. Jaetaan yhtälö tällä puolittain:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 & \\ & -5x_2 & -10x_3 & = & -20 & |:(-5) \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Sitten lisätään toinen yhtälö ensimmäiseen -2:lla kerrottuna ja kolmanteen 7:llä kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 & |\leftarrow & \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 & |\cdot(-2) & |\cdot 7 \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 & & |\leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & -x_3 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & & 10x_3 & = & 30 \end{array}\right. .$$

Jaetaan vielä viimeinen yhtälö puolittain luvulla 10:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & & -x_3 & = & -2 & \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 & \\ & & 10x_3 & = & 30 & |:10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & -x_3 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & & x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

ja lisätään se ensimmäiseen 1:llä kerrottuna sekä toiseen -2:lla kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & & -x_3 & = & -2 & |\leftarrow & \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 & | & |\leftarrow \\ & & x_3 & = & 3 & |\cdot 1 & |\cdot(-2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & -2 \\ & & x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Näin on yhtälöryhmä täydellisesti ratkaistu.

Toisinaan jotain tuntematonta eliminoitaessa eliminoituu kaksi tuntematonta samalla kertaa. Tällöin voidaan vaihtaa yhtälöiden järjestystä, jotta eliminointia voidaan jatkaa.

Esimerkki 10.5. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Ensimmäisen yhtälön ensimmäinen kerroin on jo 1, joten voidaan ruveta suoraan eliminoimaan:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 & |\cdot(-2) & |\cdot(-1) \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 0 & |\leftarrow & | \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 & & |\leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & & x_3 & = & -14 \\ & -4x_2 & & = & -4 \end{array}\right. .$$

Koska toisesta yhtälöstä hävisi myös toinen tuntematon, vaihdetaan toinen ja kolmas yhtälö keskenään, jolloin saadaan

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & -4x_2 & & = & -4 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Nyt voidaan jatkaa normaalisti. Jaetaan toinen yhtälö puolittain -4:llä:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 & \\ & -4x_2 & & = & -4 & |:(-4) \\ & & x_3 & = & -14 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Eliminoidaan toinen tuntematon ensimmäisestä yhtälöstä. (Kolmannesta yhtälöstä se on jo eliminoitu.)

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 & |\leftarrow \\ & x_2 & & = & 1 & |\cdot(-3) \\ & & x_3 & = & -14 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & -x_3 & = & 4 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Eliminoidaan lopuksi kolmas tuntematon ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 4 & \mid \leftarrow \\ & x_2 & & = & 1 & \\ & & x_3 & = & -14 & \mid \cdot 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & & & = & -10 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{cases}.$$

Nyt yhtälöryhmä on ratkaistu.

Lineaarisella yhtälöryhmällä ei välttämättä ole ratkaisua. Tällöin jotkut yhtälöt ovat *ristiriitaisia*, esimerkiksi

$$\begin{cases} x-y & = & 1 \\ x-y & = & 2 \end{cases}.$$

Toisaalta yhtälöryhmällä voi olla ääretön määrä ratkaisuja. Tällöin jotkin yhtälöt sisältävät samaa tietoa, esimerkiksi

$$\begin{cases} x-y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{cases}.$$

Tässä mitkä tahansa x ja y, joille pätee $x = y$, toteuttavat molemmat yhtälöt.

Lause 10.6. *Lineaarisella yhtälöryhmällä on aina joko yksi, ei yhtään tai ääretön määrä ratkaisuja. Jos yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, tai niitä on ääretön määrä, sanotaan, että yhtälöryhmä on* huonosti ratkeava.

Esimerkki 10.7. Ratkaistaan eliminoimalla esimerkin 10.2 yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x & -y & +z & = & -2 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 \end{cases}.$$

Jaetaan aluksi ensimmäinen yhtälö puolittain 2:lla, jolloin saadaan

$$\begin{cases} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 \end{cases}.$$

Lisätään sitten ensimmäinen yhtälö toiseen 3:lla kerrottuna:

$$\begin{cases} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 & \mid \cdot 3 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 & \mid \leftarrow \end{cases} \iff \begin{cases} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \\ & \frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -3 \end{cases}.$$

Jaetaan jälkimmäinen yhtälö 1/2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\begin{cases} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \\ & y & +z & = & -6 \end{cases}.$$

Lisätään lopuksi toinen yhtälö ensimmäiseen 1/2:lla kerrottuna:

$$\begin{cases} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 & \mid \leftarrow \\ & y & +z & = & -6 & \mid \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x & & +z & = & -4 \\ & y & +z & = & -6 \end{cases}.$$

Viimeistä tuntematonta ei voida nyt eliminoida, koska se ei ole missään yhtälössä ensimmäisenä. Tällaista tuntematonta kutsutaan *vapaaksi muuttujaksi.* Sen arvo voi olla mitä vain. Yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja, mutta nämä ratkaisut riippuvat vapaan muuttujan z arvosta. Jos esimerkiksi $z = 0$, niin $x = -4$ ja $y = -6$.

Edellisessä esimerkissä on kaksi yhtälöä ja kolme tuntematonta. Jotta vapaita muuttujia ei tulisi, täytyy yhtälöitä olla vähintään yhtä paljon kuin tuntemattomia. Lisäksi mikä tahansa yhtälöryhmä voi olla ratkeamaton. Yhteenvetona saadaan seuraava lause.

Lause 10.8. *Jos lineaarisessa yhtälöryhmässä on n tuntematonta ja m yhtälöä, missä $n > m$, yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

Esimerkki 10.9. Tarkastellaan seuraavaa yhtälöryhmää:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -2 \end{array}\right. .$$

Ensimmäisen yhtälön ensimmäinen kerroin on valmiiksi 1. Lisätään ensimmäinen yhtälö toiseen -2:lla kerrottuna ja kolmanteen -1:llä kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 & |\cdot(-2) & |\cdot(-1) \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 & |\leftarrow & | \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -2 & & |\leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & -x_2 & -x_3 & = & -4 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 \end{array}\right. .$$

Jaetaan toinen yhtälö puolittain -1:llä:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 & \\ & -x_2 & -x_3 & = & -4 & |:(-1) \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 \end{array}\right. .$$

Lisätään sitten toinen yhtälö ensimmäiseen -1:llä kerrottuna ja kolmanteen 3:lla kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 & |\leftarrow & \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 & |\cdot(-1) & |\cdot 3 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 & & |\leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & & 0 & = & 7 \end{array}\right. .$$

Viimeiseltä riviltä eliminoituivat kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jäi 7. Tämä on ristiriitaista, sillä $0 \neq 7$. Yhtälöryhmällä ei siis ole ratkaisua. (Huomaa, että vaikka ensimmäisellä rivillä $x_1 = -1$, tämä ei ole ratkaisu, sillä yhtälöryhmää ratkaistaessa on kaikki tuntemattomat löydettävä siten, että ne toteuttavat kaikki yhtälöt.)

Kerrataan vielä yhtälöryhmän ratkaisumenetelmä. Jokaista yhtälöä kohti ylhäältä alkaen suoritetaan seuraavat vaiheet:

1. Vaihdetaan yhtälö jonkin alemman, käsittelemättömän, yhtälön kanssa, jos tarvitaan.
2. Jaetaan yhtälö puolittain siten, että ensimmäisen tuntemattoman kertoimeksi tulee 1.
3. Eliminoidaan tämän tuntemattoman avulla vastaava tuntematon kaikista muista yhtälöistä.

Kun nämä vaiheet on suoritettu kaikille yhtälöille, tulos voi olla jokin seuraavista:

- Kaikki tuntemattomat jäävät yksin omalle rivilleen, ja yhtälöryhmä ratkeaa yksikäsitteisesti.
- Jokin muuttuja ei ole ensimmäisenä millään rivillä. Tämä on vapaa muuttuja, ja yhtälöryhmän ratkaisu riippuu sen arvosta. Ratkaisuja on ääretön määrä.
- Jostakin yhtälöstä häviää kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jää nollasta poikkeava luku. Tällöin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

10.2. **Matriisit ja vektorit.**

Määritelmä 10.10. Lukukaaviota, jossa on m riviä ja n saraketta, kutsutaan *matriisiksi*, jonka *tyyppi* on $m \times n$, eli $m \times n$*-matriisiksi*. Matriiseja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla. Olkoon esimerkiksi

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nyt M on $m \times n$-matriisi. Luvut $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ ovat tavallisia lukuja, matriisin *alkioita*. Alkioita merkitään M_{ij}, missä i on rivin numero ja j sarakkeen numero. Esimerkiksi M_{21} on toisen rivin ensimmäinen alkio, eli tässä tapauksessa $M_{21} = a_{21}$.

Esimerkki 10.11. Esimerkkejä matriiseista:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 13 & \pi \\ 0 & -5 & \sqrt{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Näiden matriisien tyypit ovat vasemmalta oikealle lukien 2×2, 3×3, 3×1 ja 2×3.

Matriiseja voidaan laskea yhteen ja vähentää toisistaan. Lisäksi niitä voidaan kertoa luvuilla ja toisilla matriiseilla. Näillä operaatioilla on kuitenkin rajoituksia. Matriisit voi esimerkiksi laskea yhteen vain, jos ne ovat samaa tyyppiä.

Määritelmä 10.12. Matriisien yhteenlasku- ja vähennyslasku. Olkoot A ja B $m \times n$-matriiseja. Yhteenlasketun matriisin $A + B$ alkiot saadaan laskemalla A:n ja B:n alkiot yhteen kohdakkain. Sama pätee vähennyslaskulle $A - B$. Siis

$$(A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}.$$

Huom! Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan.

Esimerkki 10.13. Kahden 3×2-matriisin yhteenlasku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 10.14. Skalaarikertolasku. Minkä tahansa matriisin A voi kertoa reaaliluvulla c. Tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi* ja merkitään cA (ilman kertomerkkiä). Tällöin jokainen matriisin alkio kerrotaan kyseisellä luvulla, eli

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}.$$

Esimerkki 10.15. Erään 3×2-matriisin kertominen luvulla:

$$2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisin kertominen luvulla on helppo toimitus ja se voidaan aina suorittaa. Kahden matriisin välinen kertolasku on hieman monimutkaisempi ja rajoitetumpi operaatio.

Määritelmä 10.16. Matriisikertolasku. Kaksi matriisia voidaan kertoa toisillaan vain, jos *ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä*. Olkoon siis A $m \times n$-matriisi ja B $n \times p$-matriisi. Tällöin matriisi AB on määritelty. Sen alkio $(AB)_{ij}$ saadaan kertomalla A:n i:nnen rivin alkiot B:n j:nnen sarakkeen alkioilla ja laskemalla nämä yhteen. Siis

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

Tuloksena on $m \times p$-matriisi.

Esimerkki 10.17. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koska A:ssa on kolme saraketta ja B:ssä on vastaavasti kolme riviä, matriisit voidaan kertoa keskenään.

Tarkastellaan aluksi tulomatriisin ensimmäisen rivin ensimmäistä alkiota. Määritelmän mukaan on otettava matriisista A ensimmäinen rivi ja matriisista B ensimmäinen sarake, kerrottava näillä olevat alkiot keskenään, ja laskettava yhteen. Siis

$$\begin{aligned}(AB)_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ &= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 4.\end{aligned}$$

Samaan tapaan lasketaan muutkin alkiot:

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tulos on 2×2-matriisi, niin kuin pitääkin.

Matriisia, jossa on yhtä monta riviä kuin saraketta, kutsutaan *neliömatriisiksi*. Neliömatriiseja voidaan kertoa toisillaan kummin tahansa päin, mutta tulos ei silti välttämättä ole sama.

Esimerkki 10.18. Olkoon $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix},$$

mutta

$$BA = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Aina ei siis päde $AB \neq BA$. Kuitenkin seuraavat säännöt pätevät matriisien kertolaskulle silloin, kun se voidaan suorittaa:

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B + C) = AB + AC$.

Määritelmä 10.19. Matriisia, jossa on vain yksi sarake, kutsutaan *(sarake-)vektoriksi*. Jos sarakkeessa on n alkiota, kyseessä on n-vektori. Vektori voidaan merkintöjen helpottamiseksi kirjoittaa myös $(x_1, \ldots, x_n)$. Vektorin alkioita kutsutaan sen *komponenteiksi*. Vektoreita merkitään yleensä jollain seuraavista tavoista: $\bar{x}$, $\vec{x}$ tai $\mathbf{x}$.

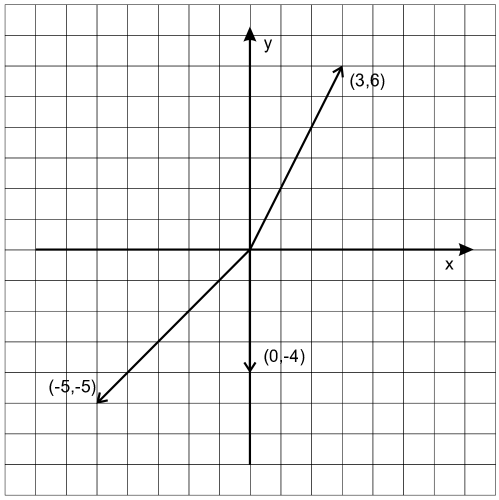
Esimerkki 10.20. Muutamia vektoreita:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \pi \\ e \end{bmatrix}.$$

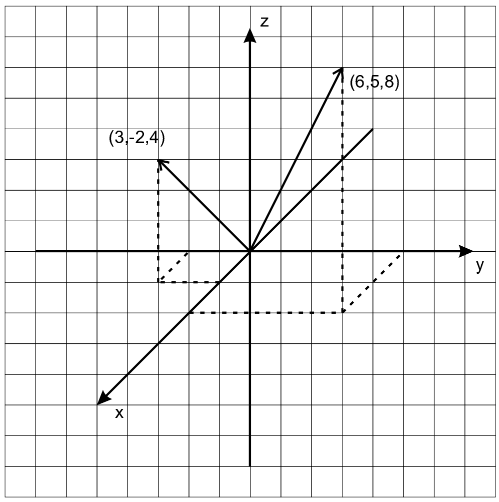
Nämä vektorit voidaan kirjoittaa myös $(1, 2, 3, 4)$, $(-1, 0)$, $(-1, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ ja (π, e).

Sarakevektoreilla on erityinen geometrinen tulkinta. Ne voidaan ajatella koordinaatiston nuolina, jotka ulottuvat origosta siihen pisteeseen, jonka koordinaatteina ovat vektorin komponentit. Tällaisista vektoreista voidaan piirtää kuvia, jos ne ovat 2- tai 3-vektoreita (eli *taso*- tai *avaruusvektoreita*).

Esimerkki 10.21. Tasovektorit $(3, 6)$, $(-5, -5)$ ja $(0, -4)$:

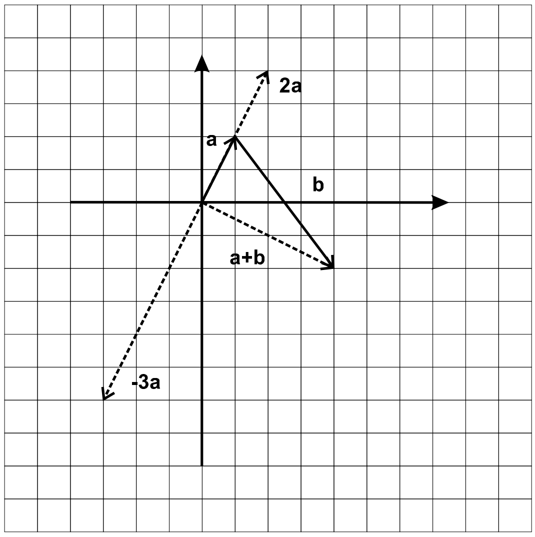


Avaruusvektorit $(6, 5, 8)$, ja $(3, -2, 4)$:



Vektorien yhteenlaskua ja skalaarikertolaskua voidaan myös havainnollistaa geometrisesti. Yhteenlaskussa vektoreita kuvaavia nuolia siirretään niin, että ne tulevat peräkkäin. Yhteenlaskettua nuolta kuvaa origosta piirretty nuoli ketjun loppupäähän. Skalaarikertolaskussa kerrotaan nuolen pituutta vastaavalla luvulla. Jos kerroin on negatiivinen, nuolen suunta kääntyy.

Esimerkki 10.22. Olkoon $\bar{a} = (1, 2)$ ja $\bar{b} = (3, -4)$. Alla olevassa kuvassa on suoritettu yhteenlasku $\bar{a} + \bar{b} = (4, -2)$, sekä skalaarikertolaskut $2\bar{a} = (2, 4)$ ja $-3\bar{a} = (-3, -6)$.



Nuolitulkinnan avulla voidaan myös määritellä vektorin pituus. Se on vektoria vastaavan nuolen pituus, joka saadaan Pythagoraan lauseesta.

Määritelmä 10.23. Vektorin $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *pituus* on

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Skalaarikertolaskulle pätee $|a\bar{x}| = |a||\bar{x}|$. (Tässä $|a|$ on a:n itseisarvo.)

Esimerkki 10.24. Edellisen esimerkin (10.22) vektorien pituudet ovat

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \qquad |\bar{b}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5,$$
$$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \qquad |2\bar{a}| = 2|\bar{a}| = 2\sqrt{5},$$
$$|-3\bar{a}| = 3|\bar{a}| = 3\sqrt{5}.$$

Ainoastaan 1-vektoreita voidaan kertoa keskenään kuten matriiseja. Vektoreille voidaan kuitenkin määritellä toisenlaisia kertolaskuja, kuten *pistetulo.*

Määritelmä 10.25. Olkoon $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ n-vektoreita. Näiden *pistetulo* on komponenttien tulojen summa:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

(Vertaa tätä matriisien kertolaskuun.)

Pistetulo kuvaa vektoreiden välistä kulmaa.

Lause 10.26. *Olkoot x ja y n-vektoreita. Jos merkitään näitä kuvaavien nuolten välistä kulmaa $\measuredangle(\bar{x}, \bar{y})$, niin*

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}| \cos \measuredangle(\bar{x}, \bar{y}).$$

Erityisesti, $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ jos ja vain jos nuolet ovat suorassa kulmassa. Jos nuolet ovat samansuuntaiset, niin $\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}|$.

Esimerkki 10.27. Etsi jokin vektori, joka on kohtisuorassa esimerkin 10.21 vektoreita $\bar{a} = (6, 5, 8)$ ja $\bar{b} = (3, -2, 4)$ vastaan.

Olkoon etsittävä tuntematon vektori $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Koska sen on oltava kohtisuorassa molempia mainittuja vektoreita vastaan, on oltava

$$\bar{a} \cdot \bar{x} = 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 0, \quad \text{ja}$$
$$\bar{b} \cdot \bar{x} = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0.$$

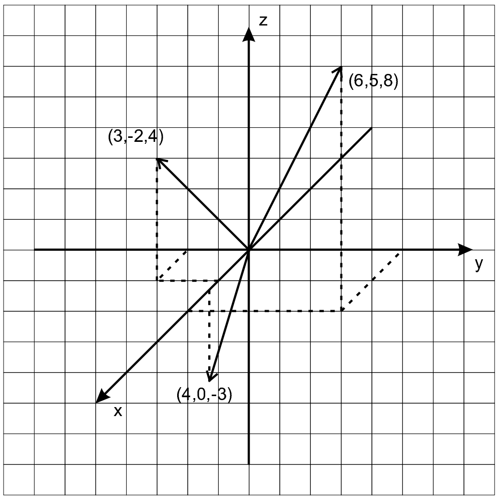
Ehdot muodostavat lineaarisen yhtälöparin, jonka ratkaiseminen on jo tuttua. Eliminoimalla saadaan

$$\begin{cases} 6x_1 & +5x_2 & +8x_3 & = & 0 & \mid :6 \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & 0 & \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +\frac{5}{6}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & 0 & \mid \cdot(-3) \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & 0 & \mid \leftarrow \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 & +\frac{5}{6}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & 0 & \\ & -\frac{9}{2}x_2 & & = & 0 & \mid :(\frac{9}{2}) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +\frac{5}{6}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & 0 & \mid \leftarrow \\ & x_2 & & = & 0 & \mid \cdot(-\frac{5}{6}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 & & +\frac{4}{3}x_3 & = & 0 \\ & x_2 & & = & 0 \end{cases}.$$

Ratkaisuun jäi vapaa muuttuja x_3. Ratkaisuja on siis ääretön määrä. Valitaan esimerkiksi $x_3 = -3$, jolloin $x_1 = 4$, ja löydetty ratkaisuvektori on $\bar{x} = (4, 0, -3)$.



10.3. **Yhtälöryhmän ratkaiseminen matriisien avulla.** Tässä osassa tarkastellaan vain sellaisia yhtälöryhmiä, joissa on yhtä monta yhtälöä kuin tuntematonta. Mikä tahansa yhtälöryhmä voidaan kuitenkin muuttaa tällaiseen muotoon niin, että ratkaisut pysyvät samoina. Yhtälöihin voidaan aina lisätä tuntemattomia, jos kertoimeksi asetetaan nolla. Toisaalta sama yhtälö voidaan toistaa useamman kerran, jolloin yhtälöiden määrää voi kasvattaa muuttamatta ratkaisuja.

Olkoon A $n \times n$-neliömatriisi, alkioinaan $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, ja olkoot $\bar{x}$ ja $\bar{b}$ n-vektoreita. Tarkastellaan matriisiyhtälöä

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

Yhtälön vasemmalla puolella oleva kertolasku antaa tulokseksi

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Oikealla puolella taas on vektori $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Yhtälö pätee, jos ja vain jos vasemmanpuoleisen matriisin alkiot ovat samat kuin oikeanpuoleisen, eli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_2 \end{cases}.$$

Tällainen matriisiyhtälö vastaa siis lineaarista yhtälöryhmää.

Lause 10.28. *Lineaarista yhtälöryhmää, jossa on n yhtälöä ja n tuntematonta, vastaa matriisiyhtälö $A\bar{x} = \bar{b}$, missä A on $n \times n$-matriisi, joka sisältää yhtälöryhmän kertoimet, $\bar{x}$ on n-vektori, joka sisältää tuntemattomat, ja $\bar{b}$ on n-vektori, joka sisältää yhtälöiden oikealla puolella olevat arvot.*

Eliminointimenetelmää käytettäessä muuttujien kirjoittaminen on oikeastaan turhaa, sillä vain kertoimilla on eliminoinnin kannalta merkitystä. Suorittamalla eliminointi matriisimuodossa vältytään muuttujien toistuvalta kirjoittamiselta.

Esimerkki 10.29. Olkoon ratkaistavana seuraava yhtälöryhmä:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x & +6y & +z & = & -3 \\ x & +3y & & = & 3 \\ 4x & +4y & +z & = & -5 \end{array}\right. .$$

Tätä vastaa matriisiyhtälö $A\bar{x} = \bar{b}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Unohdetaan nyt hetkeksi tuntemattomat, ja ryhdytään eliminoimaan *yhdistettyä matriisia*

$$[A|\bar{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 0 & | & 3 \\ 4 & 4 & 1 & | & -5 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan aluksi ensimmäinen rivi 3:lla, jotta ensimmäiseksi kertoimeksi saadaan 1:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 0 & | & 3 \\ 4 & 4 & 1 & | & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} :3 \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{3} & | & -1 \\ 1 & 3 & 0 & | & 3 \\ 4 & 4 & 1 & | & -5 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten ensimmäinen rivi toiseen -1:llä kerrottuna ja kolmanteen -4:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{3} & | & -1 \\ 1 & 3 & 0 & | & 3 \\ 4 & 4 & 1 & | & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & |\cdot(-4) \\ \leftarrow & | \\ & |\leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{3} & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & 4 \\ 0 & -4 & -\frac{1}{3} & | & -1 \end{bmatrix}.$$

Toisen rivin ensimmäisenä (nollasta poikkeavana) kertoimena on 1, joten voidaan ryhtyä suoraan eliminoimaan. Lisätään toinen rivi ensimmäiseen -2:lla kerrottuna ja kolmanteen 4:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{3} & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & 4 \\ 0 & -4 & -\frac{1}{3} & | & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot(-2) & |\cdot 4 \\ & |\leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -9 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & | & 15 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan alin rivi luvulla $-5/3$, jotta saadaan ensimmäiseksi nollasta poikkeavaksi kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -9 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & | & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :\left(-\frac{5}{3}\right) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -9 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{bmatrix}.$$

Lisätään lopuksi kolmas rivi ensimmäiseen -1:llä kerrottuna ja toiseen $1/3$:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -9 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ & |\leftarrow \\ \cdot\frac{1}{3} & |\cdot(-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -9 \end{bmatrix}.$$

Nyt eliminointi on suoritettu. Syntynyttä yhdistettyä matriisia vastaa seuraava täysin ratkaistu yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & -9 \end{cases}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi hieman tavallisen yhtälön ratkaisemista ja yritetään soveltaa sitä matriisiyhtälön ratkaisemiseen. Ensimmäisen asteen yhtälö on muotoa $ax = b$. Jos $a \neq 0$, löytyy a:lle käänteisluku $a^{-1} = 1/a$, jonka avulla yhtälö voidaan ratkaista:

$$\begin{aligned} & ax = b \\ \iff & a^{-1}(ax) = a^{-1}b \\ \iff & (a^{-1}a)x = a^{-1}b \\ \iff & 1 \cdot x = a^{-1}b \\ \iff & x = a^{-1}b. \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaiseminen perustuu tiettyihin lukujen ominaisuuksiin. Ensinnäkin $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x$, toiseksi $a^{-1}a = 1$ ja lopulta $1 \cdot x = x$. Yritetään löytää vastaavat ominaisuudet matriiseilta, aloittaen viimeisestä.

Määritelmä 10.30. Neliömatriisia, joka sisältää vasemmalta ylhäältä oikealle alas kulkevalla lävistäjällään pelkkiä ykkösiä ja muuten pelkkiä nollia, kutsutaan *yksikkömatriisiksi* ja merkitään

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

missä n on rivien (ja sarakkeiden) lukumäärä. Jokaista lukua n vastaa oma yksikkömatriisi. Yksikkömatriisilla on se ominaisuus, että jos X on mikä tahansa $n \times p$-matriisi, niin

$$\mathrm{I}_n X = X.$$

Yksikkömatriisilla kertominen vastaa siis ykkösellä kertomista: se ei muuta matriisia mitenkään. Myös käänteislukua vastaava matriisi voidaan määritellä.

Määritelmä 10.31. Olkoon A $n \times n$-neliömatriisi. Jos on olemassa jokin matriisi B, jolle pätee $BA = \mathrm{I}_n$, niin sanotaan, että A on *säännöllinen* (eli *kääntyvä*), ja B on A:n *käänteismatriisi*. Käänteismatriisi on yksikäsitteinen, ja sitä merkitään A^{-1}. Lisäksi, jos A on säännöllinen, niin myös A^{-1} on säännöllinen ja sen käänteismatriisi on A (eli $(A^{-1})^{-1} = A$ ja $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$).

Esimerkki 10.32. Olkoon $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$BA = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2.$$

Siispä B on A:n käänteismatriisi, eli $B = A^{-1}$.

Jos neliömatriisille A sovelletaan eliminointimenetelmää, voi tuloksena olla yksikkömatriisi (vrt. esim. 10.29). Jos samat operaatiot suoritetaan yksikkömatriisille, tuloksena on A:n käänteismatriisi.

Lause 10.33. ***Käänteismatriisin olemassaolo ja löytäminen.*** *Olkoon A $n \times n$-matriisi. Sovelletaan yhdistettyyn matriisiin $[A|\mathrm{I}_n]$ eliminointimenetelmää, jolloin saadaan uusi yhdistetty matriisi $[B|C]$. Jos nyt B on yksikkömatriisi, niin A on säännöllinen, ja C on A:n käänteismatriisi. Jos taas $B \neq \mathrm{I}_n$, niin A ei ole säännöllinen.*

Esimerkki 10.34. Tarkastellaan esimerkin 10.32 matriisia $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Sovelletaan eliminointimenetelmää yhdistettyyn matriisiin $[A|\mathrm{I}_2]$:

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} :2 \\ \end{array} \quad \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{array} \\
\rightsquigarrow &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :\frac{1}{2} \end{array} \quad \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \end{array} \\
\rightsquigarrow &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Vasemmalle puolelle muodostui yksikkömatriisi, joten $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tämä vastaa aikaisempaa tulosta.

Esimerkki 10.35. Tarkastellaan vielä matriisia $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$. Eliminoimalla yhdistettyä matriisia $[S|\mathrm{I}_2]$ saadaan

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{array} \quad \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Vasemmanpuoleisen matriisin toiselta riviltä hävisivät kaikki alkiot, joten eliminointia ei voida jatkaa. Matriisia ei saatu yksikkömatriisiksi, joten sillä ei ole käänteismatriisia.

Tarkastellaan nyt jälleen matriisiyhtälöä $A\bar{x} = \bar{b}$. Jos A:lla on käänteismatriisi, voimme ratkaista tämän yhtälön aivan kuten ensimmäisen asteen yhtälön kertomalla molemmat puolet vasemmalta A:n käänteismatriisilla. (Muistetaan lisäksi, että matriisikertolaskulle pätee $A(BC) = (AB)C$.) Tämä käy seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&A\bar{x} = \bar{b} \\
\iff &A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}\bar{b} \\
\iff &(A^{-1}A)\bar{x} = A^{-1}\bar{b} \\
\iff &\mathrm{I}_n\bar{x} = A^{-1}\bar{b} \\
\iff &\bar{x} = A^{-1}\bar{b}.
\end{aligned}$$

Yhtälöryhmä voidaan siis ratkaista käänteismatriisin avulla. Lisäksi ratkaisun *onnistuminen* riippuu vain kerroinmatriisista A, ei tuntemattomista tai vektorista $\bar{b}$.

Lause 10.36. *Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä $A\bar{x} = \bar{b}$. Jos kerroinmatriisi A on säännöllinen, yhtälöryhmän ratkaisu on $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$. Jos A ei ole säännöllinen, yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

Käänteismatriisi soveltuu käytettäväksi erityisesti silloin, kun on ratkaistavana monta yhtälöryhmää, joissa on samat kertoimet.

Esimerkki 10.37. Olkoon ratkaistavana seuraavat yhtälöparit:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 5y & = & 1 \\ x + 3y & = & 2 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcr} 2x + 5y & = & -2 \\ x + 3y & = & 0 \end{array}\right..$$

Näissä yhtälöpareissa on samat kertoimet, ja ne voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöinä $A\bar{x} = \bar{b_1}$ ja $A\bar{x} = \bar{b_2}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \bar{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisin A käänteismatriisi laskettiin esimerkissä 10.34. Se on $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Nyt voidaan ratkaista helposti molemmat yhtälöryhmät. Ensimmäisessä

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b_1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

joten ratkaisu on $x = -7$, $y = 3$. Toisessa yhtälöryhmässä

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-2) + (-5) \cdot 0 \\ -1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

joten ratkaisu on $x = -6$, $y = 2$.