Y100 matematiikka
Harjoitus 4
28.11.2005 ja 1.12.2005

1. Maanviljelijä on ostanut siemeniä, jotka riittävät pinta-alaltaan 40000 m^2:n suorakulmaisen pellon kylvämiseen. Pelto kylvetään metsän reunaan, ja ympäröidään muilta kolmelta sivulta aidalla. Miten pitkät on tehtävä pellon sivuista, jotta aidasta tulisi mahdollisimman lyhyt?

2. Laske seuraavat integraalit.

$$\text{a)} \quad \int_{-1}^{1} 3x^2 - 4x + 1\,dx, \qquad \text{b)} \quad \int_{1}^{2} \frac{1}{t^2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{t}\,dt.$$

3. Erään kuudennen asteen polynomifunktion derivaatta on

$$f'(x) = x(x+3)(x+1)(x-1)(x-2).$$

Tällöin derivaatan nollakohdat ovat -3, -1, 0, 1 ja 2. Määritä alkuperäinen funktio ja tutki, ovatko derivaatan nollakohdat paikallisia minimejä vai maksimeja. (Vihje: käytä hyväksi toista derivaattaa.)

4. Laske seuraavat integraalit. Tässä on hyötyä yhdistetyn funktion derivoimissäännöstä.

$$\text{a)} \quad \int_{0}^{2} 4x(2x^2-4)^6\,dx, \qquad \text{b)} \quad \int_{-1}^{1} \frac{x-2}{(x^2-4x+2)^3}\,dx.$$

5. Fysiikassa kappaleen liikuttamiseen käytettävä voima määritellään kappaleen liikemäärän muutoksena ajan suhteen. Mitä kovempi voima, sitä enemmän liikemäärä muuttuu. Liikemäärä on vastaavasti voiman kertymä ajassa.
Erään moottorin tuottama voima työntää eteenpäin venettä. Kun veneilijä käynnistää moottorin, pysyy moottorin tuottama voima F ensin hetken nollassa ja alkaa sitten kasvaa ajan t funktiona seuraavasti:

$$F(t) = \frac{3}{2}\sqrt{100t - 20}$$

Oletetaan, että veneen liikemäärä on alussa 0. Laske tämän perusteella veneen liikemäärä hetkellä 2 moottorin käynnistämisestä lukien. Huomaa, että voiman vaikutuksen alku näkyy annetun funktion määrittelyjoukossa.

6. Määritellään kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla funktiot $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = -x^{2k} + 1$. Mikä on funktion f_k ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala? Mitä arvoa pinta-ala lähestyy, kun k kasvaa? Piirrä kuva tilanteesta muutamalla k:n arvolla, sekä rajatilanteesta, kun $k \to \infty$.