Y100 matematiikka
Harjoitus 2
21. ja 24.11.2005

1. Määritä erotusosamäärää tutkimalla, ovatko seuraavat funktiot derivoituvia pisteessä $x = 0$. (Huomaa sieventää a-kohdassa erotuosamäärä loppuun asti.)

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}, \\ &\text{b)} \quad f(x) = x^3 + 1, \\ &\text{c)} \quad h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{kun } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

2. Laske ensimmäiset ja toiset derivaatat seuraaville funktioille. (toinen derivaatta = derivaatan derivaatta)

$$\text{a)} \quad f(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 4, \qquad \text{b)} \quad g(x) = (-x^2 + 3)^6.$$

3. Laske derivaatat. Missä pisteissä derivaatat on määritelty?

$$\text{a)} \quad g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{2x + 2}, \qquad \text{b)} \quad f(x) = \frac{1}{x} + 6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}\ln x.$$

4. Määritä funktioiden derivaatat ja etsi derivaattojen nollakohdat, jos niitä löytyy. Ovatko funktiot kasvavia tai väheneviä? Entäpä aidosti kasvavia tai väheneviä? Perustele.

$$\text{a)} \quad g(x) = x + \sin(x), \qquad \text{b)} \quad f(x) = \frac{1}{e^x}.$$

5. Jokainen aitametri maksaa maltaita. Siksi on hyvä löytää lyhin tapa rakentaa haluamansa aita. Määritellään funktio $f : [\frac{1}{3}, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x}$, joka kuvaa erään kiviaidan sijoittumista perinteisessä laidunhaassa. Aita siis alkaa pisteessä $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}))$ ja loppuu pisteessä $(3, f(3))$. Isäntä haluaa rakentaa suoran aidan, joka yhdistää origon entiseen aitaan. Jos uudesta aidasta tehdään mahdollisimman lyhyt, missä pisteessä aidat kohtaavat? Kuinka pitkä uusi aita on? (vihje: käytä alussa Pythagoraan lausetta ja muista, että nimittäjä ei vaikuta nollakohtiin)

6. Maatalon emäntä aikoo leipoa miehensä kasvattamien kanojen munista neliöpohjaisen täytekakun. Kakun reunat ja päällinen katetaan kermalla. Emännän kerma riittää 1200 cm^2 kokoiselle pinnalle. Miten paksu emännän on tehtävä kakusta, jotta kerma riittäisi mutta kakusta tulisi tilavuudeltaan mahdollisimman kookas?

   Vihje: Valitse muuttujaksi kakun leveys ja päättele kakun paksuus käytettävissä olevan kerman määrästä.