Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

30.5.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Käytännön asioita

- Kurssi on suunnilleen puolessa välissä.
- Kannattaa tarkistaa tavoitetaulukosta, mitä on oppinut ja mitä vielä oppimatta.

Kertausta: Matriisit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriisi A on $m \times n$ -matriisi eli sen *tyyppi* on $m \times n$.
- Rivillä i sarakkeessa j olevaa alkiota merkitään $A(i, j)$.
- Kaikkien reaalikertoimisten $m \times n$ -matriisien joukkoa merkitään $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Kertausta: Matriisien laskutoimitukset

- Matriiseja voidaan laskea yhteen ja kertoa skalaareilla.
- Matriisikertolasku on hieman monimutkaisempi operaatio.
- Matriisipotenssi määritellään matriisikertolaskun avulla.
- Kaikissa laskutoimituksissa (skalaarikertolaskua lukuunottamatta) on tarkistettava, että matriisit ovat sopivaa tyyppiä.

Kertausta: Matriisien laskusääntöjä

Lause 1

Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A, B ja C sekä reaaliluvulle a, jos laskutoimitukset on määritelty:

(a) $A + B = B + A$

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(c) $A(BC) = (AB)C$

(d) $A(B + C) = AB + AC$

(e) $(A + B)C = AC + BC$

(f) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

- Huomaa, että yleisessä tapauksessa $AB \neq BA$!

Kertausta: Ykkösmatriisi

- Ykkösmatriisi:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- Ykkösmatriiseja on eri kokoisia. Usein koko jätetään merkitsemättä: $I_n = I$.
- Ykkösmatriisi on aina neliömatriisi.
- Ykkösmatriisi käyttäytyy matriisien kertolaskussa kuin luku 1:

$$I_m A = A \quad \text{ja} \quad A I_n = A$$

Transpoosi

Määritelmä

Oletetaan, että A on $m \times n$ -matriisi. Sen *transpoosi* $A^\top$ on $n \times m$ -matriisi, joka saadaan vaihtamalla matriisin A rivit ja sarakkeet keskenään.

- Esimerkiksi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  transpoosi on

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Matriisin A sanotaan olevan *symmetrinen*, jos $A^\top = A$.

Käänteismatriisi

Määritelmä

Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa matriisi B, jolle pätee

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

sanotaan, että A on *kääntyvä* ja B on matriisin A *käänteismatriisi*.

Esimerkki

Matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi on

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, sillä

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehtävä

Onko jokin seuraavista matriiseista matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi?

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Käänteismatriisien ominaisuuksia

- Jos matriisi A on kääntyvä, sen käänteismatriisille käytetään merkintää A^{-1}.
- Käänteismatriisit vastaavat käänteislukuja. Kaikki ominaisuudet eivät kuitenkaan ole samoja!

Lause 2

Matriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi.

Käänteismatriisien ominaisuuksia

Lause 3

Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä. Tällöin myös matriisit A^{-1} ja AB ovat kääntyviä. Niiden käänteismatriisit ovat seuraavat:

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Luentotehtävä 1

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huone: 969797

Mikä seuraavista joukoista on eräs $\mathbb{R}^3$:n aliavaruus? (Tässä oli vahingossa kaksi oikeaa ratkaisua.)

A $\{(1,0,1) + s(-1,0,-1) + t(2,4,5) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$

B $\{(s+t, 2s-t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$

C $\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = v_2 + v_3\}$

D $\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = v_2 + v_3 + 1\}$

Luentotehtävä 2

Mikä seuraavista **ei** kävisi vapauden määritelmäksi?

A Yhtälöstä $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ saatavan yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitteinen.

B Yhtälö $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ pätee, jos $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$.

C Jokainen $\bar{w} \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ voidaan esittää vain yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

D Nollavektori voidaan esittää vain yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

E Yhtälöstä $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ saatavassa matriisissa on kerroinsarakkeiden määrä k korkeintaan yhtä suuri kuin rivien määrä n ja nollarivien määrä yhtä suuri kuin $n - k$.

Sarakevektorit

- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ voidaan samastaa matriisin
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$
kanssa.
- Joukon $\mathbb{R}^{n \times 1}$ alkioita kutsutaan *sarakevektoreiksi*.

Esimerkki

- Vektoria $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ voidaan kertoa matriisilla $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- Lasketaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja vektorin $\bar{v} = (-5, 3)$ tulo.

Matriisikertolasku ja lineaariset yhtälöryhmät

- Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

- Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matriisikertolasku ja lineaariset yhtälöryhmät

- Nähdään, että

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

- Yhtälöryhmä voidaan näin ollen kirjoittaa muodossa $A\bar{x} = \bar{b}$.

Kääntyvyyden vaikutus yhtälöryhmään

Lause 4

Jos matriisi A on kääntyvä, yhtälöllä on $A\bar{x} = \bar{b}$ täsmälleen yksi ratkaisu.

- Jos yhtälöryhmälle halutaan täsmälleen yksi ratkaisu, riittää tutkia kerroinmatriisia A.