# Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

29.5.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

# Kertausta: Kanta

**Määritelmä**

Oletetaan, että $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k \in W$. Vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden $W$ kanta, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $W = \text{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$

b) $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

# Esimerkki

- On osoitettu, että vektorit $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$. Lisäksi on osoitettu, että jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa. Siten $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.
- Vastaavasti avaruudella $\mathbb{R}^n$ on kanta

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n),$$

missä $\bar{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Kantaa kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *luonnolliseksi kannaksi*.

# Kertausta: Kannan karakterisointi

**Lause 1**

Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden $W$ kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden $W$ vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.

# Kertausta: Esimerkki

- Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$.
- Osoitetaan, että $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.
- Ratkaisun antaa yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & u_1 \\ -1 & 3 & u_2 \end{array}\right].$$

- Päädytään redusoituun porrasmatriisiin

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(3u_1 - u_2) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(u_1 + 2u_2) \end{array}\right].$$

# Kertausta: Koordinaatit

### Määritelmä

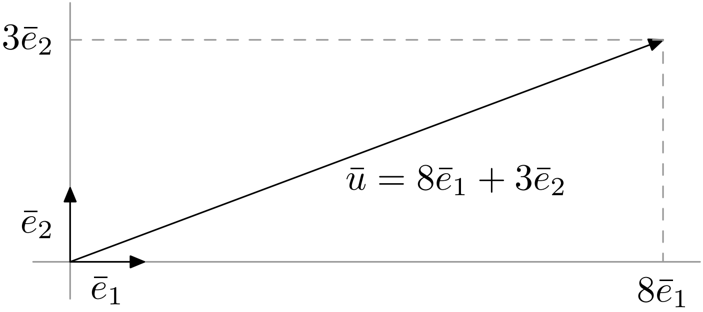
Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden $W$ kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in W$. Vektorin $\bar{u}$ *koordinaateiksi kannan* $\mathcal{B}$ *suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \dots, a_k$, joilla

$$\bar{u} = a_1\bar{w}_1 + \cdots + a_k\bar{w}_k.$$

- Edeltävän lauseen 1 nojalla koordinaatit ovat yksikäsitteisesti määrätyt.

# Kertausta: Esimerkki

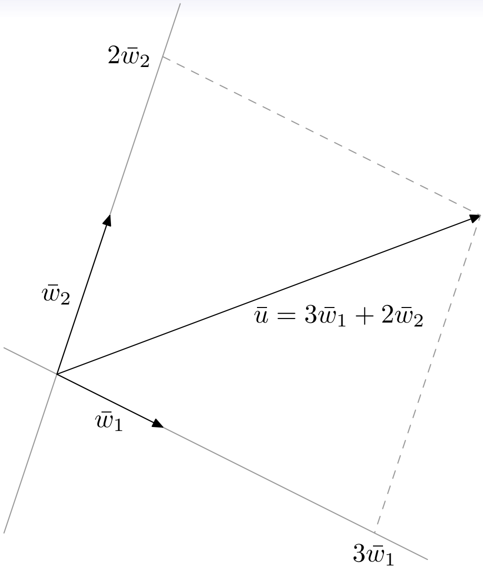
- Määritetään vektorin $\bar{u} = (8, 3)$ koordinaatit avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollisen kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen.



# Esimerkki

- Määritetään vektorin $\bar{u} = (8, 3)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen, missä $\bar{w}_1 = (2, -1)$ ja $\bar{w}_2 = (1, 3)$.
- Käytetään aiemmin saatua matriisia

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(3u_1 - u_2) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(u_1 + 2u_2) \end{array}\right].$$



$2\bar{w}_2$
$\bar{w}_2$
$\bar{u} = 3\bar{w}_1 + 2\bar{w}_2$
$\bar{w}_1$
$3\bar{w}_1$

# Dimensio

Voidaan osoittaa, että

- jokaisella aliavaruudella on kanta
- jokaisessa tietyn aliavaruuden kannassa on yhtä monta vektoria.

### Määritelmä

Aliavaruuden $W$ *dimensio* $\dim(W)$ on aliavaruuden $W$ kannan vektoreiden lukumäärä.

Jos aliavaruuden dimensio on $n$, sanotaan, että aliavaruus on *$n$-ulotteinen*.

# Esimerkki

- Avaruuden $\mathbb{R}^2$ dimensio on 2, sillä avaruudella on luonnollinen kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.
- Vastaavasti avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio on $n$, sillä avaruuden luonnollisen kannan vektorien lukumäärä on $n$.

## Esimerkki

- Merkitään $\bar{v}_1 = (3, -1, 5)$, $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ ja $\bar{v}_3 = (0, -5, 1)$. Olkoon $W = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.
- Mikä on aliavaruuden $W$ dimensio?
- **Tapa 1**: Tutkitaan, millä ehdolla vektori $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ kuuluu aliavaruuteen:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 0 & u_1 \\ -1 & 1 & -5 & u_2 \\ 5 & 3 & 1 & u_3 \end{array}\right] \cdots \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 5 & -u_2 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{5}(u_1 + 3u_2) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}(5u_3 + u_2 - 8u_1) \end{array}\right].$$

- Aliavaruus on joukko $\{(u_1, u_2, u_3) \mid 5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0\}$.

# Esimerkki jatkuu

- Muokataan joukkoa:

$$\begin{aligned} W &= \{(u_1, u_2, u_3) \mid 5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0\} \\ &= \cdots \\ &= \{u_1(1,8,0) + u_3(0,-5,1) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

- Siispä $W = \operatorname{span}\big((1,8,0),(0,-5,1)\big)$.
- Tarkistetaan vielä, että saatu jono on vapaa, jolloin dimensio on 2.

# Esimerkki jatkuu

- **Tapa 2**: Tutkitaan, mitkä alkuperäisistä virittäjävektoreista voidaan jättää pois:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & * \\ -1 & 1 & -5 & * \\ 5 & 3 & 1 & * \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & * \\ 0 & 1 & -3 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right].$$

- Nähdään, että $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$.
- Tarkistetaan vielä, että saatu jono on vapaa, jolloin dimensio on 2.

# Luentotehtävä

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huone: 969797

Millä $x$:n arvolla seuraavien vektorien jono on sidottu?

$$(-1,0,0), \quad (2,11,0), \quad (-3,2,x)$$

A vain arvolla 1

B vain arvolla 0

C kaikilla arvoilla

D ei millään arvolla

E en tiedä

# MATRIISIT

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriisi $A$ on $m \times n$ -matriisi eli sen *tyyppi* on $m \times n$.
- Rivillä $i$ sarakkeessa $j$ olevaa alkiota merkitään $A(i, j)$.
- Kaikkien reaalikertoimisten $m \times n$ -matriisien joukkoa merkitään $\mathbb{R}^{m \times n}$.

# Esimerkki

Esimerkiksi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 500 \\ -3 & 11 & \pi \\ \frac{3}{4} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}$$

on $4 \times 3$-matriisi eli $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$.

# Matriisien yhteenlasku

Matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

# Matriisin kertominen skalaarilla

$$2\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot(-1)\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

# Matriisikertolasku

Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään vain, jos ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä.

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

# Esimerkki

- Matriisien kertolasku ei ole vaihdannainen!
- Lasketaan matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

  tulo $AB$.
- Miltä näyttää tulo $BA$?

# Matriisipotenssi

- Matriisikertolaskun avulla voidaan määritellä potenssiin korottaminen.
- Oletetaan, että $A$ on $n \times n$-matriisi ja $k \in \{1, 2, \dots\}$. Tällöin määritellään
$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ kpl}}.$$

# Matriisien laskusääntöjä

## Lause 2

Seuraavat säännöt pätevät matriiseille $A$, $B$ ja $C$ sekä reaaliluvulle $a$, jos laskutoimitukset on määritelty:

(a) $A + B = B + A$

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(c) $A(BC) = (AB)C$

(d) $A(B + C) = AB + AC$

(e) $(A + B)C = AC + BC$

(f) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

- Huomaa, että yleisessä tapauksessa $AB \neq BA$!

# Erityisiä matriiseja

- Nollamatriisi:

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

- Ykkösmatriisi:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

- Usein merkitään $O_{m\times n} = O$ ja $I_n = I$.

# Erityisiä matriiseja

- Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Nollamatriisi käyttäytyy yhteenlaskussa kuin luku 0:

$$A + O_{m \times n} = A$$

- Ykkösmatriisi käyttäytyy kertolaskussa kuin luku 1:

$$I_m A = A \quad \text{ja} \quad A I_n = A$$

# Erityisiä matriiseja

- Lävistäjämatriisi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

- Skalaarimatriisi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Jälkimmäinen on sama kuin $2I_3$