Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

28.5.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Käytännön asioita

- Ensimmäisen harjoituksen mallit ovat ilmestyneet. Tutustu niihin huolella.
- Pidä kurssimateriaalia mukana kaikissa opetustilanteissa.

Kertausta: Vapauden karakterisointi

Lause 1

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

Kertausta: Riippuvuuden karakterisointi

Lause 2

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ja $k \geq 2$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos vain jos

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

- Toisin sanoen: vektorijono on sidottu, jos ja vain jos **jokin** sen vektoreista voidaan ilmaista toisten lineaarikombinaationa.

Kertausta: Homogeeniset yhtälöryhmät

Määritelmä

Lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kaikki vakiot ovat nollia, on nimeltään *homogeeninen yhtälöryhmä*.

- Esimerkki homogeenisesta yhtälöryhmästä:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} - 2x_4 = 0 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Kertausta: Homogeenisten yhtälöryhmien ominaisuus

Lause 3

Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on suurempi kuin yhtälöiden määrä m, niin homogeenisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

Esimerkki

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdots \to \cdots \left[\begin{array}{ccrr|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

- Koska vakiot ovat nollia, ei tule epätosia yhtälöitä.
- Koska sarakkeita on enemmän kuin rivejä, tulee välttämättä vapaita muuttujia. Siten ratkaisuja on äärettömän monta.

Kertausta: Seuraus

Lause 4
Oletetaan, että $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$, missä $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Jos $m > n$, niin jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ on sidottu.

- **Huom.** Jos $m \leq n$, ei vapaudesta voida sanoa mitään.

Lauseen 1 todistus

"$\Rightarrow$" Oletetaan, että $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoitetaan, että aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ jokainen alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ jokainen alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Osoitetaan, että $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa.

Luentotehtävä 1

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huone: 969797

Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukkoa
$V = \{(s+t, -2s+3t, s-t)) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ koskevia väittämiä:

(1) $V = \text{span}((1,-2,1),(1,3,-1))$

(2) Joukko muodostaa aliavaruuden.

(3) Joukko ei muodosta tasoa.

(4) Joukko sisältää origon.

Mitkä väitteistä pätevät?
A: kaikki B: vain (4) C: vain (2) ja (4)
D: vain (1), (2) ja (4) E: vain (2), (3) ja (4)

Luentotehtävä 2

Millä x:n arvolla seuraavien vektorien jono on sidottu?

$$(1, 0, -2), \quad (0, 0, 2), \quad (x, 0, 0)$$

A vain arvolla 1

B vain arvolla 0

C kaikilla arvoilla

D ei millään arvolla

E en tiedä

Kanta

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k \in W$. Vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$

b) $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

Esimerkki

- On osoitettu, että vektorit $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$. Lisäksi on osoitettu, että jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa. Siten $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.
- Vastaavasti avaruudella $\mathbb{R}^n$ on kanta

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n),$$

missä $\bar{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Kantaa kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *luonnolliseksi kannaksi*.

Kannan karakterisointi

Lause 5

Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.

Esimerkki

- Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$.
- Osoitetaan, että $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.
- Ratkaisun antaa yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & u_1 \\ -1 & 3 & u_2 \end{array}\right].$$

- Päädytään redusoituun porrasmatriisiin

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(3u_1 - u_2) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(u_1 + 2u_2) \end{array}\right].$$

Koordinaatit

Määritelmä

Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in W$. Vektorin $\bar{u}$ *koordinaateiksi kannan* $\mathcal{B}$ *suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \ldots, a_k$, joilla

$$\bar{u} = a_1 \bar{w}_1 + \cdots + a_k \bar{w}_k.$$

- Edeltävän lauseen 5 nojalla koordinaatit ovat yksikäsitteisesti määrätyt.

Esimerkki

- Määritetään vektorin $\bar{u} = (8, 3)$ koordinaatit avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollisen kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen.