Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

27.5.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Käytännön asioita

- Tällä viikolla luento myös keskiviikkona.

Kertausta: Esimerkki

- Osoitetaan, että vektorit

$$\bar{u}_1 = (1,1,0), \ \bar{u}_2 = (1,0,1), \ \bar{u}_3 = (0,1,1) \text{ ja } \bar{u}_4 = (-2,1,1)$$

  virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.
- Oletetaan, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$.
- On selvitettävä, onko olemassa lukuja $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 + x_4\bar{u}_4 = \bar{w}.$$

- Saadaan yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right].$$

Kertausta: Esimerkki jatkuu

- Alkeisrivitoimituksilla (esim. Maplen avulla) saadaan redusoitu porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(w_1 + w_2 - w_3) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(w_1 - w_2 + w_3) \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(-w_1 + w_2 + w_3) \end{array}\right].$$

- Vapaa muuttuja, joten ratkaisuja on useita!
- Tarkastellaan vaikkapa vektoria $\bar{w} = (1, 2, 3)$.
- Nyt yleinen ratkaisu on $x_1 = t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = 2 - 2t$, $x_4 = t$, missä $t \in \mathbb{R}$.

Kertausta: Esimerkki jatkuu

- Jos esimerkiksi valitaan $t = 1$, saadaan ratkaisu

$$\bar{w} = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + \bar{u}_4.$$

- Jos taas valitaan $t = 2$, saadaan ratkaisu

$$\bar{w} = 2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 - 2\bar{u}_3 + 2\bar{u}_4.$$

- Seuraavana tavoitteena on löytää sellainen virittäjäjoukko, että aliavaruuden vektorit voidaan ilmaista virittäjävektorien lineaarikombinaationa **täsmälleen yhdellä tavalla**.

Kertausta: Vapaus

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\ldots$, $c_k = 0$.

- Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu* tai *lineaarisesti riippuva*.

Kertausta: Esimerkki

Merkitään $\bar{w}_1 = (2, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (-4, -2)$. Onko avaruuden jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ vapaa?

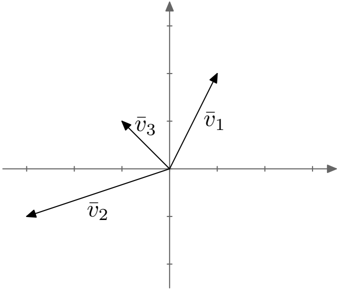
Kertausta: Esimerkki

Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2)$, $\bar{v}_2 = (-3, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, 1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa vai sidottu.

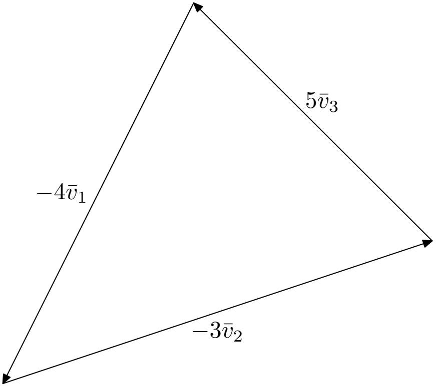
Kertausta: Esimerkki jatkuu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right].$$



$\bar{v}_3$
$\bar{v}_1$
$\bar{v}_2$



$5\bar{v}_3$
$-4\bar{v}_1$
$-3\bar{v}_2$

Luentokysymys 1

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huoneen numero: 969797

Minkälaisia olivat toisen viikon harjoitustehtävät?

A Liian työläitä

B Työläitä, mutta se oli hyvä

C Eivät työläitä, mutteivät helppojakaan

D Helppoja, mutta se oli hyvä

E Liian helppoja

Luentokysymys 2

Olkoot $\bar{v}_1 = (2, -1, 0)$, $\bar{v}_2 = (-3, 0, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (1, -1, 2)$. Yhtälö $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}$ johtaa seuraavanlaiseen matriisiin:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5}(-w_1 - 7w_2 + 3w_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5}(-2w_1 - 4w_2 - w_3) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5}(w_1 + 2w_2 + 3w_3) \end{array}\right].$$

Tarkastellaan seuraavia väittämiä:

(1) Vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.

(2) Jokainen $\mathbb{R}^3$:n vektori voidaan esittää vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa.

(3) Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa.

Mitä väitteistä pitävät paikkansa?

A: vain (1) ja (2) B: vain (2) C: vain (1) ja (3) D: kaikki

E: en tiedä

Miksi vapaus kiinnostaa?

- Jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, **nollavektori** voidaan kirjoittaa vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa vain yhdellä tavalla. (Vapauden määritelmä.)
- Tästä seuraa itse asiassa, että **kaikki** avaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ vektorit voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa vain yhdellä tavalla.
- Vapaasta vektorijonosta saadaan siis virittäjäjoukko, jossa ei ole "turhia" vektoreita.

Vapauden karakterisointi

Lause 1

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

Riippuvuuden karakterisointi

Lause 2

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ja $k \geq 2$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos vain jos

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

- Toisin sanoen: vektorijono on sidottu, jos ja vain jos **jokin** sen vektoreista voidaan ilmaista toisten lineaarikombinaationa.

Esimerkki

- Merkitään $\bar{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_3 = (0, 0, 2)$ ja $\bar{v}_4 = (3, -1, 0)$.
- Tällöin esimerkiksi

$$2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \bar{v}_4 = \bar{0},$$

  joten jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ on sidottu.
- Edellisen lauseen perusteella jokin vektoreista voidaan kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa.

Homogeeniset yhtälöryhmät

Määritelmä

Lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kaikki vakiot ovat nollia, on nimeltään *homogeeninen yhtälöryhmä*.

- Esimerkki homogeenisesta yhtälöryhmästä:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - 2x_4 = 0 \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Homogeenisten yhtälöryhmien ominaisuus

Lause 3

Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on suurempi kuin yhtälöiden määrä m, niin homogeenisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

Esimerkki

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdots \to \cdots \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

- Koska vakiot ovat nollia, ei tule epätosia yhtälöitä.
- Koska sarakkeita on enemmän kuin rivejä, tulee välttämättä vapaita muuttujia. Siten ratkaisuja on äärettömän monta.

Seuraus

Lause 4

Oletetaan, että $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$, missä $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Jos $m > n$, niin jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ on sidottu.

- **Huom.** Jos $m \leq n$, ei vapaudesta voida sanoa mitään.