Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

23.5.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Käytännön asioita

- Ensimmäiset tehtävät olivat sujuneet hyvin.
- Kansilehdet on oltava mukana tehtäviä palautettaessa, myös sähköisesti palauttavilla.
- Kansilehden on oltava päällimmäisenä, selvästi luettavissa.
- Sähköisesti palauttavien on laitettava kansilehden tiedot myös viestikenttään.
- Rehellinen ja ainakin joitakin tuloksia tuottanut työskentely tehtävän parissa riittää merkintään, mutta jos et ole päässyt lainkaan eteenpäin, älä merkitse tehtävää tehdyksi. Kysy ohjauksissa apua, jos jäät jumiin.

Kertausta: Gaussin–Jordanin menetelmä

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.
3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

Kertausta: Redusoidun porrasmatriisin tulkinta

- Jos jokin viimeisistä riveistä on $[0 \cdots 0|1]$, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Muussa tapauksessa

- Jos jossakin sarakkeessa (pystyviivan vasemmalla puolella) ei ole johtavaa alkiota, sitä vastaa vapaa muuttuja. Ratkaisuja on ääretön määrä.
- Jos kaikissa sarakkeissa (pystyviivan vasemmalla puolella) on johtava alkio, ratkaisu on yksikäsitteinen ja luettavissa suoraan matriisista.

Kertaus: Aliavaruusesimerkki

- Kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

  $$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

  virittämään aliavaruuteen?
- Toisin sanoen: onko yhtälöryhmällä

  $$\begin{cases} \phantom{-x_1 + {}} 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 \phantom{{}+ 2x_2} + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 \phantom{{}+ 2x_3} = -1 \end{cases}$$

  ratkaisua?

Kertausta: Aliavaruusesimerkin ratkaisu

- Yhtälöryhmää vastaava redusoitu porrasmatriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.
- Vastaus kysymykseen: vektori ei kuulu aliavaruuteen.

Demoja

- Montako ratkaisua yhtälöryhmällä on? Kysytään WolframAlphalta!
- Paperilla laskettaessa porrasmuoto usein riittää.

Esimerkki

- Millä ehdolla vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kuuluu vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (3, 2, -1), \quad \bar{v}_2 = (2, -2, 6) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (3, 4, -5)$$

  virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.
- Tutkitaan, milloin yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}$ on ratkaisuja.
- Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & w_1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & w_2 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & w_3 \end{cases}$$

Esimerkki jatkuu

- Muokataan yhtälöryhmää vastaava matriisi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 5 & -w_3 \\ 0 & 10 & -6 & w_2 + 2w_3 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 - 2w_2 - w_3 \end{array}\right]$$

- Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, jos ja vain jos $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$.

Luentotehtävä 1

Osoite: `m.socrative.com`

Tarkastellaan $\mathbb{R}^2$:n suoria, jotka ovat siis muotoa $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Mikä seuraavista väitteistä **ei** voi pitää paikkaansa?

A Kahdella eri suoralla on sama paikkavektori.

B Kahdella eri suoralla on eri suuntavektorit, mutta ei yhtään yhteistä pistettä.

C Kahdella eri suoralla on sama paikkavektori, mutta ei yhtään yhteistä pistettä.

D Kahden eri suoran suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset.

Luentotehtävä 2

Erästä yhtälöryhmää vastaa seuraava matriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Millä k:n arvoilla yhtälöryhmällä on (ainakin yksi) ratkaisu?

A vain arvolla 1

B vain arvolla -1

C millä tahansa arvolla

D ei millään arvolla

E en tiedä

Vektoriavaruuden virittäjät

- Mikä tahansa vektorijoukko virittää jonkin aliavaruuden.
- Toisinaan on annettu aliavaruus, ja halutaan tietää, virittävätkö jotkin tietyt vektorit kyseisen aliavaruuden.
- Erityisesti joskus on kiinnostavaa, virittävätkö annetut vektorit koko vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$.

Esimerkki

- Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$.
- Osoitetaan, että $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$.

Esimerkki

- Osoitetaan, että vektorit

$$\bar{u}_1 = (1,1,0),\ \ \bar{u}_2 = (1,0,1),\ \ \bar{u}_3 = (0,1,1) \text{ ja } \bar{u}_4 = (-2,1,1)$$

  virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.
- Oletetaan, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$.
- On selvitettävä, onko olemassa lukuja $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 + x_4\bar{u}_4 = \bar{w}.$$

- Saadaan yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right].$$

Esimerkki jatkuu

- Alkeisrivitoimituksilla (esim. Maplen avulla) saadaan redusoitu porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(w_1 + w_2 - w_3) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(w_1 - w_2 + w_3) \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(-w_1 + w_2 + w_3) \end{array}\right].$$

- Ratkaisuja on joka tapauksessa useita!
- Tarkastellaan vaikkapa vektoria $\bar{w} = (1, 2, 3)$.
- Nyt yleinen ratkaisu on $x_1 = t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = 2 - 2t$, $x_4 = t$, missä $t \in \mathbb{R}$.

Esimerkki jatkuu

- Jos esimerkiksi valitaan $t = 1$, saadaan ratkaisu

$$\bar{w} = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + \bar{u}_4.$$

- Jos taas valitaan $t = 2$, saadaan ratkaisu

$$\bar{w} = 2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 - 2\bar{u}_3 + 2\bar{u}_4.$$

- Seuraavana tavoitteena on löytää sellainen virittäjäjoukko, että aliavaruuden vektorit voidaan ilmaista virittäjävektorien lineaarikombinaationa **täsmälleen yhdellä tavalla**.

Vapaus

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\ldots$, $c_k = 0$.

- Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu* tai *lineaarisesti riippuva*.

Esimerkki

Merkitään $\bar{e}_1 = (1,0)$ ja $\bar{e}_2 = (0,1)$. Onko avaruuden $\mathbb{R}^2$ jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ vapaa?

Esimerkki

Merkitään $\bar{w}_1 = (2, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (-4, -2)$. Onko avaruuden jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ vapaa?

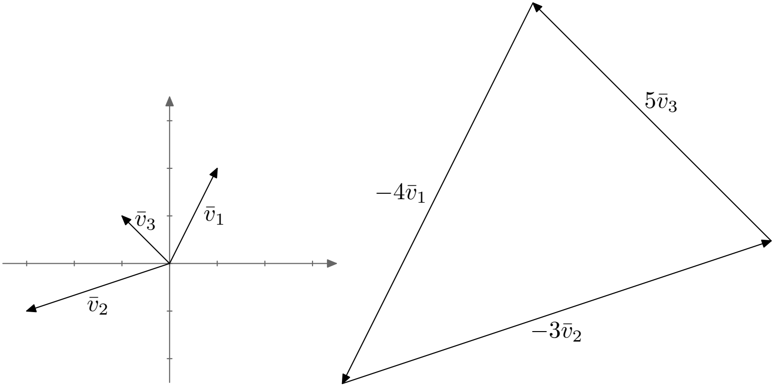
Esimerkki

Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2)$, $\bar{v}_2 = (-3, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, 1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa vai sidottu.

Esimerkki jatkuu

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right].
$$


$\bar{v}_3$
$\bar{v}_1$
$\bar{v}_2$
$5\bar{v}_3$
$-4\bar{v}_1$
$-3\bar{v}_2$