Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

21.5.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Kertausta: Gaussin–Jordanin menetelmä

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.
3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

Kertausta: Esimerkki

- Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$$

- Yhtälöryhmää vastaava matriisi on

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Kertausta: Esimerkki jatkuu

- Tuloksena redusoitu porrasmatriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & & = & -1 \\ & & x_3 & = & 1 \end{cases}$$

- Tällä yhtälöryhmällä on samat ratkaisut kuin ensimmäisellä!

Esimerkki

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3x - 6y - 3z = -21 \end{cases}$$

Esimerkki

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 15x_3 = 9 \\ x_1 \phantom{{}+3x_2} - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Esimerkki jatkuu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -15 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/3)R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esimerkki jatkuu

- Päädyttiin redusoituun porrasmatriisiin

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Kolmannessa sarakkeessa ei ole johtavaa kerrointa.
- Tämä tarkoittaa, että muuttujan x_3 arvon voi valita vapaasti.
- Kirjoitetaan $x_3 = t$ ja ratkaistaan muut muuttujat ensimmäisiltä riveiltä t:n lausekkeina: $x_1 = 1 + 2t$ ja $x_2 = 2 + 3t$.
- Yhtälöryhmän ratkaisuja on ääretön määrä: jokaisella luvun t valinnalla saadaan uusi ratkaisu (x_1, x_2, x_3).

Apuvälineitä

- Graafiset tai CAS-laskimet
- Puhelimeen saatavat CAS-sovellukset
- CAS-ohjelmat: Maple, Mathematica, MatLab...
- http://www.wolframalpha.com/

Esimerkki

Lineaarisen yhtälöryhmän matriisi muutettiin alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Mikä on yhtälöryhmän ratkaisu?

Redusoidun porrasmatriisin tulkinta

- Jos jokin viimeisistä riveistä on $[0 \cdots 0|1]$, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.
- Jos jossakin sarakkeessa (pystyviivan vasemmalla puolella) ei ole johtavaa alkiota, sitä vastaa vapaa muuttuja. Ratkaisuja on ääretön määrä.
- Jos kaikissa sarakkeissa (pystyviivan vasemmalla puolella) on johtava alkio, ratkaisu on yksikäsitteinen ja luettavissa suoraan matriisista.

Luentotehtävä 1

Osoite: `m.socrative.com`

Mikä on luvun a oltava, jotta vektori $(a, 1)$ kuuluisi vektorien $\bar{v}_1 = (2, -1)$ ja $\bar{v}_2 = (-4, 2)$ virittämään aliavaruuteen?

A 0

B 1

C 2

D jokin muu

E en tiedä

Luentotehtävä 2

Mikä seuraavista matriiseista on saatu matriisista

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

yhdellä alkeisrivitoimituksella?

A $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

D ei mikään edellisistä

Paluu aliavaruusesimerkkiin

- Kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

  $$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

  virittämään aliavaruuteen?

- Onko yhtälöryhmällä

  $$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

  ratkaisua?

Aliavaruusesimerkin ratkaisu

- Yhtälöryhmää vastaava redusoitu porrasmatriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja
- Vastaus kysymykseen: vektori ei kuulu aliavaruuteen