Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

20.5.2012

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Käytännön asioita

- Tehtävistä ja läsnäoloista saatavat pisteet ilmestyneet kotisivulle

Tähän mennessä opittua

- Vektorit ja niiden laskutoimitukset
- Suorat ja tasot $\mathbb{R}^2$:ssa ja $\mathbb{R}^3$:ssa
- Vektorien virittämät aliavaruudet
- Seuraavaksi: yhtälöryhmien ratkaiseminen
- Myöhemmin tällä viikolla: virittäminen ja vapaus

Kertausta: Aliavaruus

Määritelmä

Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä *aliavaruus* on joukko

$$\mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

- Virittäjävektoreilla $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ ei rajoituksia

Kertausta: Aliavaruuden ominaisuuksia

Lause 1

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $W = \text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin seuraavat säännöt pätevät:

a) Jos $\bar{u}$, $\bar{w} \in W$, niin $\bar{u} + \bar{w} \in W$.

b) Jos $\bar{w} \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin $a\bar{w} \in W$.

c) $\bar{0} \in W$.

Kertausta: Esimerkki

Kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$? Toisin sanoen: onko olemassa reaalilukuja x_1, x_2, x_3, joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}$$

eli

$$x_1(0, -1, 2, 1) + x_2(2, 0, 1, -1) + x_3(4, 2, 2, 0) = (-2, 3, 2, -1)?$$

eli

$$(0+2x_2+4x_3,\ -x_1+0+2x_3,\ 2x_1+x_2+2x_3,\ x_1-x_2+0) = (-2, 3, 2, -1)?$$

Esimerkki jatkuu

Päädytään yhtälöryhmään

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 + {}} 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 \phantom{{}+ x_2} + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 \phantom{{}+ 2x_3} = -1 \end{cases}$$

- Kysymys kuuluu: onko tällä lineaarisella yhtälöryhmällä ratkaisua?

Kertausta: Yhtälöryhmän matriisi

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ (-1)x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 1 \cdot x_1 & + & (-1)x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & -1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Kertausta: Ratkaisemisen idea

- Johdetaan yhtälöryhmästä uusi ekvivalentti yhtälöryhmä, josta vastaus näkyisi helpommin.
- Johtaminen tehdään vaiheittain ns. alkeisrivitoimitusten avulla.

Kertausta: Ratkaisemisen idea

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \rightsquigarrow \underset{\text{toimituksia}}{\overset{\text{alkeisrivi-}}{\cdots}} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{c}\text{samat}\\ \text{ratkaisut}\end{array} \longrightarrow \begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

Kertausta: Alkeisrivitoimitukset

1. Vaihdetaan kahden rivin paikka matriisissa.
2. Kerrotaan jokin rivi **nollasta poikkeavalla** reaaliluvulla.
3. Lisätään johonkin riviin **jokin toinen** rivi reaaliluvulla kerrottuna.

Kertausta: Porrasmatriisi

Määritelmä

Matriisi on *porrasmatriisi*, jos

1. mahdolliset nollarivit ovat alimpina
2. kullakin rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio (eli *johtava alkio*) on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kertausta: Redusoitu porrasmatriisi

Määritelmä

Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos

1. se on porrasmatriisi
2. jokaisen rivin johtava alkio on 1
3. jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehtävä

Mitkä seuraavista matriiseista ovat redusoituja porrasmatriiseja? Määritä niitä vastaavat yhtälöryhmät.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi \end{bmatrix}$

Luentotehtävä 1

Mene osoitteeseen `m.socrative.com`.

Valitse vaihtoehto: ensimmäiset harjoitustehtävät olivat

A Liian helppoja

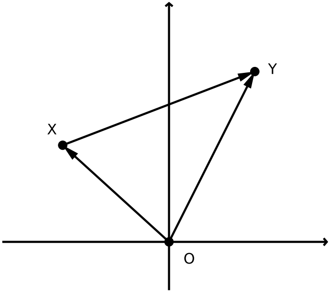
B Helppoja, mutta se oli hyvä

C Sopivan vaikeita

D Liian vaikeita

E Vaikeita, mutta se oli hyvä

Luentotehtävä 2



Kuvassa $OX = \bar{v}$ ja $OY = \bar{w}$. Suuntajanaa XY kuvaava vektori on

A $\bar{v} + \bar{w}$

B $\bar{v} - \bar{w}$

C $\bar{w} - \bar{v}$

D En tiedä

Luentotehtävä 3

Suorasta $\{(1,2,0)+s(-1,-1,2) \mid s \in \mathbb{R}\}$ on annettu erilaisia väitteitä:

(1) Suora kulkee pisteen $(1,2,0)$ kautta.

(2) Suora on vektorin $(3,3,-6)$ suuntainen.

(3) Suora on aliavaruus.

Mitkä väitteistä ovat totta?

- A Kaikki
- B Vain (1)
- C Vain (1) ja (2)
- D Vain (2) ja (3)
- E En tiedä

Gaussin–Jordanin menetelmä

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.
3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

Esimerkki

- Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$$

- Yhtälöryhmää vastaava matriisi on

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esimerkki

- Tuloksena redusoitu porrasmatriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & & = & -1 \\ & & x_3 & = & 1 \end{cases}$$

- Tällä yhtälöryhmällä on samat ratkaisut kuin ensimmäisellä!