Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

16.5.2012

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Kertausta: Aliavaruus

Määritelmä

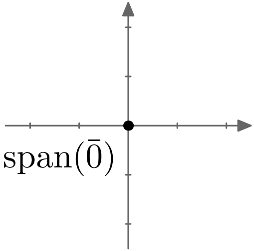
Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä *aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

- Ei mitään rajoituksia vektoreille $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$: lukumäärä voi olla mikä vain, mukana voi olla nollavektoreita, yhdensuuntaisia vektoreita ym.

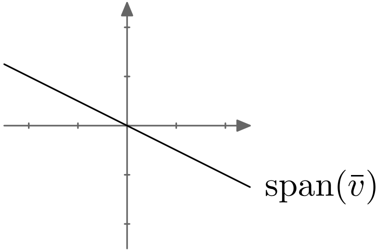
Kertausta: Nollavektorin virittämä aliavaruus

$$\mathsf{span}(\bar{0}) = \{a \cdot \bar{0} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\bar{0}\}$$



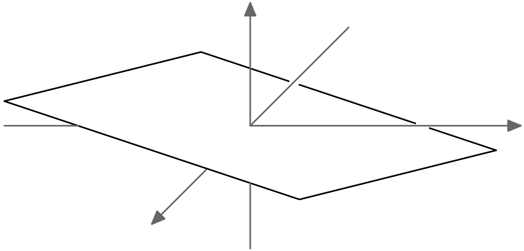
Kertausta: Muun kuin nollavektorin virittämä aliavaruus

$$\mathrm{span}(\bar{v}) = \{a\bar{v} \mid a \in \mathbb{R}\}$$



Kertausta: Kahden vektorin virittämä aliavaruus

$$\mathrm{span}(\bar{v}, \bar{w}) = \{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$



- Jos vektorit ovat yhdensuuntaiset, ei tuloksena ole taso!

Miksi origon kautta kulkevat suorat ja tasot kiinnostavat?

- Tarkastellaan suoraa

  $$S = \operatorname{span}(\bar{v}) = \{t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

  missä $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$.
- Jos suoran alkioita summaa keskenään tai kertoo skalaareilla, on tuloksena suoran alkio.

Miksi origon kautta kulkevat suorat ja tasot kiinnostavat?

- Tarkastellaan suoraa

$$S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

  joka ei kulje origon kautta.
- Jos suoran alkioita summaa keskenään tai kertoo skalaareilla, tuloksena **ei** ole suoran alkio.

Aliavaruuden ominaisuuksia

Lause 1

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $W = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin seuraavat säännöt pätevät:

a) Jos $\bar{u}$, $\bar{w} \in W$, niin $\bar{u} + \bar{w} \in W$.

b) Jos $\bar{w} \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin $a\bar{w} \in W$.

c) $\bar{0} \in W$.

Esimerkki

Kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1),\ \ \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \text{ ja } \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$? Eli onko olemassa reaalilukuja x_1, x_2, x_3, joille pätee

$$x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + x_3 \bar{v}_3 = \bar{w}$$

eli

$$x_1(0, -1, 2, 1) + x_2(2, 0, 1, -1) + x_3(4, 2, 2, 0) = (-2, 3, 2, -1)?$$

Esimerkki jatkuu

Päädytään yhtälöryhmään

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 + x_2 +{}} 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

- Tämä on niin kutsuttu lineaarinen yhtälöryhmä.

Esimerkki lineaarisesta yhtälöryhmästä

Yritetään ratkaista yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -x + 2y \phantom{{}+z} = -1 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

- Miten ratkaisu olisi tulkittava?

Yhtälöryhmän matriisi

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ (-1)x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 1 \cdot x_1 & + & (-1)x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & -1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Yhtälöryhmän ratkaisemisen idea

Määritelmä

Yhtälöryhmiä kutsutaan *ekvivalenteiksi*, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut.

- Ideana on johtaa yhtälöryhmästä uusi ekvivalentti yhtälöryhmä, josta vastaus näkyisi helpommin.
- Johtaminen tehdään vaiheittain ns. alkeisrivitoimitusten avulla.

Alkeisrivitoimitukset

1. Vaihdetaan kahden rivin paikka matriisissa.
2. Kerrotaan jokin rivi **nollasta poikkeavalla** reaaliluvulla.
3. Lisätään johonkin riviin **jokin toinen** rivi reaaliluvulla kerrottuna.

Esimerkkejä alkeisrivitoimituksista

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 5R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-(1/7)R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

Yhtälönratkaisun idea

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{alkeisrivi-} \\ \cdots \\ \text{toimituksia}\end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right. \quad \longleftarrow \begin{array}{c}\text{samat} \\ \text{ratkaisut}\end{array} \longrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n &= d_m \end{aligned}\right.$$

Porrasmatriisi

Määritelmä

Matriisi on *porrasmatriisi*, jos

1. mahdolliset nollarivit ovat alimpina
2. kullakin rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio (eli *johtava alkio*) on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.

$$\begin{bmatrix} 14 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehtävä

Mitkä seuraavista matriiseista ovat porrasmatriiseja? Mitkä ovat porrasmatriisien johtavat alkiot?

a) $$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 5 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \pi \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & \sqrt{3} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu

a) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 5 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \pi \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ei ole porrasmatriisi

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & \sqrt{3} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Redusoitu porrasmatriisi

Määritelmä

Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos

1. se on porrasmatriisi
2. jokaisen rivin johtava alkio on 1
3. jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehtävä

Mitkä seuraavista matriiseista ovat redusoituja porrasmatriiseja? Määritä niitä vastaavat yhtälöryhmät.

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi \end{bmatrix}$$