Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

14.5.2013

HY / Avoin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jokke Häsä

Yleisiä asioita

- Oppimistavoitetaulukkoon linkki kurssisivulla
- Onko kalvojen teksti liian pientä?

Kertausta

- Määritelmä: *avaruus* $\mathbb{R}^n$ koostuu jonoista $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, missä $v_i \in \mathbb{R}$ kaikilla i.
- Määritelmä: avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita kutsutaan *vektoreiksi*.
- $\mathbb{R}^2$:n (taso) ja $\mathbb{R}^3$:n (3-ulott. avaruus) vektoreilla on monia geometrisia tulkintoja: avaruuden piste, pisteen paikkavektori, suuntajana...
- Vektoreita voidaan laskea yhteen ja kertoa luvuilla, esim. $(2, -1) + (3, 2) = (5, 1)$ ja $-3(2, -1) = (-6, 3)$.
- Määritelmä: Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat *yhdensuuntaiset*, jos $\bar{w} = r\bar{v}$ jollain $r \in \mathbb{R}$.
- Määritelmä: Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *lineaarikombinaatio* on summa $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$, missä $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Vektorien laskusääntöjä

Lause 1

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja a, $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ (vaihdannaisuus)

(b) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ (liitännäisyys)

(c) $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

(d) $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

(e) $c(\bar{v} + \bar{w}) = c\bar{v} + c\bar{w}$ (osittelulaki)

(f) $(a + c)\bar{v} = a\bar{v} + c\bar{v}$ (osittelulaki)

(g) $a(c\bar{v}) = (ac)\bar{v}$

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$

- Todistetaan esimerkin vuoksi yhteenlaskun vaihdannaisuus.

Suora

- Olkoon $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Muotoa $t\bar{v}$ olevat vektorit muodostavat origon kautta kulkevan, $\bar{v}$:n suuntaisen suoran.
- Suora voidaan siirtää pois origosta lisäämällä jokin vektori $\bar{p}$.

Määritelmä

Olkoon $n = 2$ tai $n = 3$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *suora* on joukko

$$\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$.

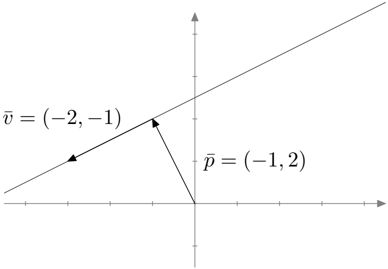
- Vektori $\bar{v}$ on suoran *suuntavektori* ja $\bar{p}$ suoran *paikkavektori*.

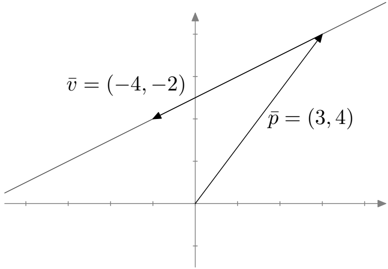
Suora

- Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^2$ suora. Jos $(a, b) \in S$, niin sanotaan, että piste (a, b) on suoralla S tai että suora S kulkee pisteen (a, b) kautta.
- Vastaavia ilmauksia käytetään avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Esimerkki

Miltä näyttää suora $S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$?


$\bar{v} = (-2, -1)$
$\bar{p} = (-1, 2)$


$\bar{v} = (-4, -2)$
$\bar{p} = (3, 4)$

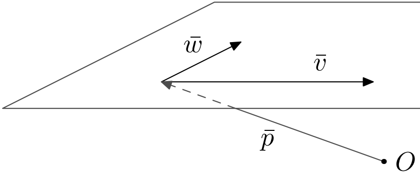
Suora voidaan kirjoittaa monella eri tavalla

- Suoran paikkavektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita suoran minkä tahansa pisteen paikkavektori.
- Suoran suuntavektoriksi $\bar{v}$ voidaan valita mikä tahansa suoran suuntainen vektori.
- Todistus sivuutetaan.

Esimerkki

Kirjoitetaan muodossa $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ suora, joka kulkee pisteiden $A = (-1, 5)$ ja $B = (2, 2)$ kautta.

Taso



Taso

Määritelmä

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *taso* on joukko

$$\{\bar{p} + s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ ja vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

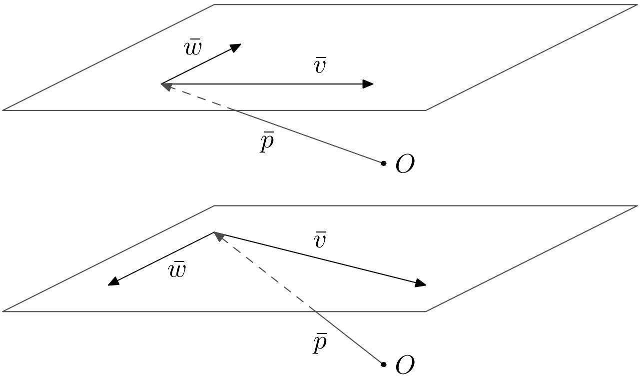
- Vektori $\bar{p}$ on tason paikkavektori, ja $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat sen suuntavektorit.

Esimerkki

Määritetään pisteiden

$$\begin{aligned} A &= (0,1,0), \\ B &= (-1,3,2) \quad \text{ja} \\ C &= (-2,0,1) \end{aligned}$$

kautta kulkeva taso T.


$\bar{w}$
$\bar{v}$
$\bar{p}$
O
$\bar{v}$
$\bar{w}$
$\bar{p}$
O

Taso voidaan kirjoittaa monella eri tavalla

- Vektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita tason minkä tahansa pisteen paikkavektori.
- Vektoreiksi $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ voidaan valita mitkä tahansa tason suuntaisen vektorit, kunhan $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ eivät ole yhdensuuntaiset.
- Todistus sivuutetaan jälleen.

Aliavaruus

- Lineaarialgebrassa ollaan kiinnostuneita erityisesti suorista ja tasoista, jotka kulkevat origon kautta (paikkavektoriksi käy $\bar{0}$).
- Yleistetään nämä heti n-ulotteiseen avaruuteen.

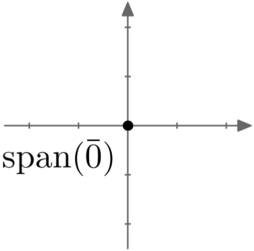
Määritelmä

Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä *aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

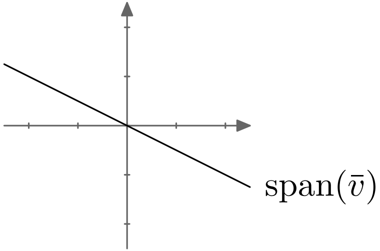
Nollavektorin virittämä aliavaruus

$$\mathsf{span}(\bar{0}) = \{a \cdot \bar{0} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\bar{0}\}$$



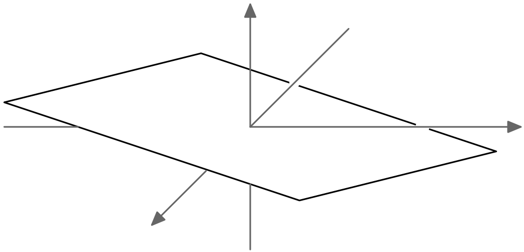
Muun kuin nollavektorin virittämä aliavaruus

$$\mathrm{span}(\bar{v}) = \{a\bar{v} \mid a \in \mathbb{R}\}$$



Kahden vektorin virittämä aliavaruus

$$\text{span}(\bar{v}, \bar{w}) = \{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$



Jos vektorit ovat yhdensuuntaiset, ei tuloksena ole taso!