Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

13.6.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Käytännön asioita

- Kesäkuun tentti: ke 19.6. klo 17-20, päärakennuksen sali 1.
- Anna palautetta kurssisivulle ilmestyvällä lomakkeella!

Mitä kurssin jälkeen?

- Tämän kurssin tiedot riittävät (lineaarialgebran osalta) pohjaksi monille muille kurssille, esim. Vektorianalyysi, Differentiaaliyhtälöt I, Stokastiset prosessit, ...
- Varsinkin matematiikkaa tai fysiikkaa pidemmälle lukevan täytyy opiskella myös jatko-osa.
- Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
    - kertaa ja syventää tämän kurssin tietoja ja taitoja
    - muitakin vektoriavaruuksia kuin $\mathbb{R}^n$
    - lineaarikuvauksia ja muita uusia asioita
- Jos aihe kiinnostaa, katso myös kurssisivulta löytyvää listaa lineaarialgebran sovelluskohteista.

Kurssilla opittua

- Vektorien laskutoimitukset
  - yhteenlasku, erotus ja skalaarikertolasku
  - laskutoimitusten havainnollistaminen
  - piste, paikkavektori, suuntajana
- Lineaarikombinaatio: $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$
- Suorat ja tasot
  - suora $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$
  - taso $\{\bar{p} + s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
  - paikka- ja suuntavektorit
  - origon kautta tai ei
- Aliavaruus
  - lineaarikombinaatioiden joukko:
    $W = \{a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$

Kurssilla opittua

- Gaussin–Jordanin menetelmä
  - porrasmatriisi ja redusoitu porrasmatriisi
  - ratkaisujen lukumäärän määrittäminen
  - ristiriita, vapaat muuttujat, yksikäsitteinen ratkaisu
- Aliavaruuden virittäminen
  - $\bar{w} \in \operatorname{span}\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$, jos $\bar{w} = x_1\bar{v}_1 + \cdots + x_k\bar{v}_k$ joillakin $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$
  - onko yhtälöryhmällä ratkaisuja?
  - koko avaruuden virittäminen: $\bar{w}$ mielivaltainen
- Vapaus (eli lineaarinen riippumattomuus)
  - jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos yhtälöllä $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ vain yksi ratkaisu
  - jos jono on sidottu, jokin vektoreista on toisten lineaarikombinaatio
  - jos vektoreita enemmän kuin komponentteja, jono sidottu

Kurssilla opittua

- Homogeeninen yhtälöryhmä
  - aina triviaaliratkaisu $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$
- Aliavaruuden kanta
  - vapaa virittäjäjono
  - jokainen aliavaruuden vektori voidaan esittää täsmälleen yhdellä tavalla kantavektorien lineaarikombinaationa
  - koordinaatit: lineaarikombinaatioesityksen kertoimet
  - dimensio: kantavektorien lukumäärä
- Matriisit
  - laskutoimitukset: yhteenlasku, skalaarikertolasku, matriisikertolasku
  - ykkösmatriisi: $AI = A$ ja $IA = A$
  - käänteismatriisin määritelmä: $AB = I$ ja $BA = I$
  - sarakevektorit

Kurssilla opittua

- Matriisit ja yhtälöryhmät
  - yhtälöryhmän ratkaiseminen käänteismatriisin avulla: jos $A\bar{x} = \bar{b}$ ja A on kääntyvä, niin $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$
  - mikä kaikki yhtäpitävää kääntyvyyden kanssa
  - käänteismatriisin löytäminen
- Determinantti
  - determinantin laskusäännöt
  - matriisi kääntyvä, jos ja vain jos determinantti ei 0
- Ominaisarvot ja ominaisvektorit
  - määritelmä: $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$
  - ominaisarvojen löytäminen: $\det(A - \lambda I) = 0$
  - ominaisvektorien löytäminen: $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$
  - diagonalisointi: $P^{-1}AP = D$

Kurssilla opittua

- Pistetulo
  - normi: $\| \bar{v} \| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$
  - etäisyys: $d(\bar{v}, \bar{w}) = \| \bar{v} - \bar{w} \|$
  - yksikkövektori: $\| \bar{v} \| = 1$
  - kulma: $\cos \alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\| \bar{v} \| \| \bar{w} \|}$
  - kohtisuoruus: $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$
  - projektio: $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\| \bar{w} \| \| \bar{w} \|} \bar{w}$
- Ristitulo
  - kohtisuoran vektorin löytäminen

Käsitekartta

aliavaruus, determinantti, dimensio, eliminointimenetelmä, kanta, kohtisuoruus, koordinaatit, käänteismatriisi, lineaarikombinaatio, matriisi, normi, ominaisarvo, ominaisvektori, pistetulo, porrasmatriisi, projektio, ristitulo, suora, taso, vapaus, vektori, virittäminen, yhtälöryhmä, ykkösmatriisi

Luentotehtävä 1

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huoneen numero: 969797

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$. Mikä seuraavista väitteistä on sellainen, että siitä ei voi tietää, pitääkö se paikkansa vai ei?

A $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$

B $(\bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})) \cdot \bar{w} = 0$

C $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) \cdot \bar{w} = 0$

D $\bar{v} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 0$

E $\bar{v} \cdot (\bar{w} \times \bar{w}) = 0$

Luentotehtävä 2

Eräällä avaruuden $\mathbb{R}^5$ aliavaruudella W on kanta $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Matriisi A on muodostettu niin, että sen sarakkeina ovat vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$. Mikä seuraavista väitteistä ei pidä paikkaansa?

A Matriisista A saatavassa porrasmatriisissa on nollarivejä.

B Matriisista A saatavassa porrasmatriisissa on jokaisessa sarakkeessa johtava alkio.

C Matriisi A on kääntyvä.

D Yhtälöryhmällä $A\bar{x} = \bar{0}$ on yksikäsitteinen ratkaisu.

E Jos $\bar{w} \in W$, niin yhtälöryhmällä $A\bar{x} = \bar{w}$ on yksikäsitteinen ratkaisu.

Hyvää kesää ja onnea kokeeseen!

http://xkcd.com/55/