Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

13.5.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Vektorit

Määritelmä

Avaruus $\mathbb{R}^2$ koostuu reaalilukupareista. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ ja } b \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ alkioita kutsutaan *vektoreiksi*.

Vektoreiden havainnollistaminen

Havainnollistetaan vektoreita $(3, -1)$ ja $(2, 4)$

- pisteinä
- paikkavektoreina
- suuntajanoina

Vektorien summa

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

Skalaarikertolasku

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2).$$

Esimerkki

Merkitään $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Määritä vektorit

a) $\bar{v} + \bar{w}$

b) $2\bar{v}$

c) $-\frac{1}{2}\bar{v}$

Vastavektori ja erotus

- Vektorin $\bar{v}$ *vastavektori* on skalaarimonikerta $(-1)\bar{v}$. Sitä merkitään $-\bar{v}$.
- Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotus* on summa $\bar{v} + (-\bar{w})$. Sitä merkitään $\bar{v} - \bar{w}$.

Esimerkki

Merkitään $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Määritä vektori $\bar{v} - \bar{w}$.

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorit

- Avaruus $\mathbb{R}^3$ on joukko $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
- Yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään komponenteittain samalla tavalla kuin avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Avaruus $\mathbb{R}^n$

Määritelmä

Oletetaan, että $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiot ovat reaaliluvuista koostuvia n-jonoja. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita kutsutaan *vektoreiksi*.

Vektorien laskutoimitukset

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

ja

$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2, \dots, cv_n).$$

Vastavektori, erotus ja nollavektori

- Vektorin $\bar{v}$ *vastavektori* on skalaarimonikerta $(-1)\bar{v}$. Sitä merkitään $-\bar{v}$.
- Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotus* on summa $\bar{v} + (-\bar{w})$. Sitä merkitään $\bar{v} - \bar{w}$.
- Vektoria $(0, 0, \ldots, 0)$ kutsutaan *nollavektoriksi*. Sille käytetään merkintää $\bar{0}$.

Esimerkki

Merkitään $\bar{v} = (-5, 3, 0, 1, -1)$ ja $\bar{w} = (-2, -4, 2, 3, 5)$.

Määritä vektori $2\bar{v} - 3\bar{w}$.

Yhdensuuntaisuus

Määritelmä

Vektorit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat *yhdensuuntaiset*, jos $\bar{v} = r\bar{w}$ jollakin $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin merkitään $\bar{v} \parallel \bar{w}$.

Esimerkki

Ovatko vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ yhdensuuntaiset, jos

a) $\bar{v} = (-2, 1)$ ja $\bar{w} = (6, -3)$?

b) $\bar{v} = (-2, 1)$ ja $\bar{w} = (3, -1)$?

Lineaarikombinaatio

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\ldots \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\ldots \bar{v}_k$ *lineaarikombinaatio*, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut a_1, a_2, $\ldots$, a_k, että

$$\bar{w} = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \cdots + a_k \bar{v}_k.$$

Esimerkki

Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 2)$ ja $\bar{w} = (5, -1)$.

Osoitetaan, että vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatio.

Vektoreiden laskusääntöjä

Lause 1

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $a,\ b \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ (vaihdannaisuus)

(b) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ (liitännäisyys)

(c) $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

(d) $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

(e) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ (osittelulaki)

(f) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ (osittelulaki)

(g) $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$