Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

11.6.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Käytännön ohjeita

- Tarkistakaa pisteet kurssisivun taulukosta.
- Opiskelkaa malliratkaisuja huolella.
- Tehkää kertaustehtäviä.
- Kysykää epäselväksi jääneitä asioita.
- Silmäilkää myös luentotehtäviä uudelleen.

Kertausta: Pistetulo

Määritelmä

Vektoreiden $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

Normi eli pituus

Määritelmä

Vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli *pituus* on

$$\| \bar{v} \| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen *etäisyys* on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \| \, \bar{v} - \bar{w} \, \|.$$

Vektorien välinen kulma

Määritelmä

Vektorien $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ välinen kulma on se kulma α, jolle pätee

- $\cos\alpha = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\| \bar{v} \| \| \bar{w} \|}$ ja
- $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Huomautuksia:

- Jälleen määritelmä.
- Tätä määritelmää varten on osoitettava

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\| \bar{v} \| \| \bar{w} \|} \leq 1.$$

- Tarvitaan nk. Schwarzin epäyhtälöä: $|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \| \bar{v} \| \| \bar{w} \|$.

Esimerkki

Määritä vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ välinen kulma.

Ortogonaalisuus eli kohtisuoruus

Määritelmä

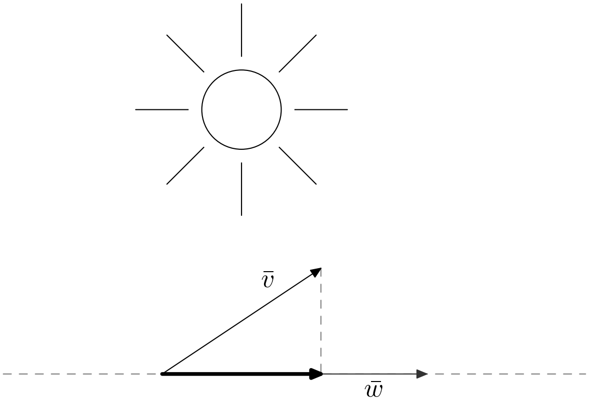
Vektorit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 0.$$

Tällöin merkitään $\bar{v} \perp \bar{w}$.

- **Huom.** Määritelmä ei sano suoraan mitään vektorien välisen kulman suuruudesta.
- Kuitenkin pätee $\bar{v} \perp \bar{w}$, jos ja vain jos $\bar{v}$:n ja $\bar{w}$:n välinen kulma on 90°.

Projektio



Projektio

Määritelmä

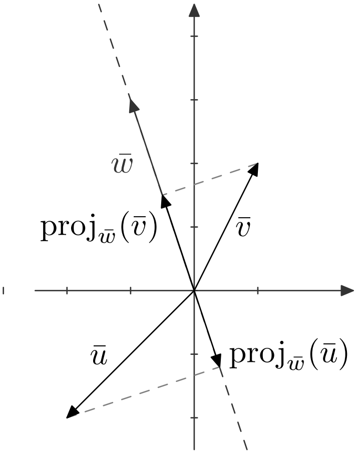
Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ *projektio* vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Esimerkki

- Määritä vektorin $\bar{v} = (1, 2)$ projektio vektorin $\bar{w} = (-1, 3)$ virittämälle aliavaruudelle.
- Määritä vektorin $\bar{u} = (-2, -2)$ projektio vektorin $\bar{w} = (-1, 3)$ virittämälle aliavaruudelle.

Esimerkki



Projektion karakterisointi

Lause 1

Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ on vektorin $\bar{v}$ projektio aliavaruudelle $\mathrm{span}(\bar{w})$, jos ja vain jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) vektori $\bar{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa

(b) vektori $\bar{v} - \bar{u}$ on kohtisuorassa vektoria $\bar{w}$ vastaan.

Luentotehtävä 1

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huoneen numero: 969797

Eräälle yhtälöryhmälle $A\bar{x} = \bar{b}$ on löydetty ratkaisut $\bar{x}_1 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{x}_2 = (1, 0, 2)$. Yhtälöryhmän kerroinmatriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & c & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Mikä luku on c?

A 1

B 0

C $1/3$

D 3

E ei voi tietää

Luentotehtävä 2

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorien jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu. Mikä seuraavista **ei välttämättä** pidä paikkaansa?

A Yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ on ääretön määrä ratkaisuja.

B Vektorit $\bar{v}_1$ $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ eivät viritä avaruutta $\mathbb{R}^3$.

C Matriisi A, jonka sarakkeina ovat vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$, ei ole kääntyvä.

D Vektori $\bar{v}_1$ on tasossa, jonka suuntavektorit ovat $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$.

E Matriisin A, jonka riveinä ovat vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$, determinantti on 0.

Ristitulo

Määritelmä

Vektorien $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ *ristitulo* on vektori

$$\bar{v} \times \bar{w} = \big(v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1\big).$$

- **Huom.** Ristitulo määritellään nimenomaan avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \\ & & & & \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_1 & w_2 \end{array}$$

Esimerkki

Lasketaan vektoreiden $\bar{a} = (2, 1, 4)$ ja $\bar{b} = (3, -1, -3)$ ristitulo $\bar{a} \times \bar{b}$.

Toinen muistisääntö

Ristitulo $\bar{v} \times \bar{w}$ saadaan laskemalla "determinantti"

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\bar{e}_1 - (v_1 w_3 - v_3 w_1)\bar{e}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\bar{e}_3.$$

Pistetulo vs. ristitulo

Pistetulo

- avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille
- tuloksena reaaliluku

Ristitulo

- avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreille
- tuloksena vektori

Ristitulon laskusääntöjä

Ristitulolle on kaikenlaisia laskusääntöjä. Erikoisimmat ovat ehkä seuraavat:

Lause 2

Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin

(a) $\bar{v} \times \bar{w} = -(\bar{w} \times \bar{v})$

(b) $\bar{v} \times \bar{v} = \bar{0}$

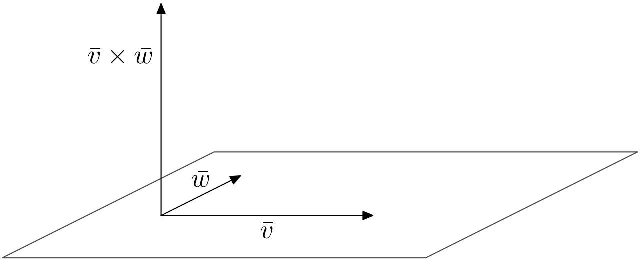
(c) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$.

Ristitulo ja kohtisuoruus

Lause 3

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin

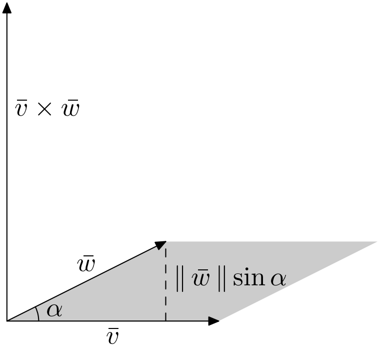
$$(\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{v} \quad \text{ja} \quad (\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{w}.$$



Ristitulo ja suunnikkaan ala

Lause 4

Ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan ala.



Ristitulovektorin suunta

- Vektori $\bar{v} \times \bar{w}$ on kohtisuorassa vektoreita $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ vastaan.
- Vektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus saadaan suunnikkaan pinta-alasta.
- Jäljelle jää kysymys, osoittaako $\bar{v} \times \bar{w}$ ylös- vai alaspäin?
- Vastaus saadaan ns. *oikean käden sormisäännöstä*:
    - jos oikean käden peukalo on $\bar{v}$:n suuntainen
    - ja etusormi $\bar{w}$:n suuntainen,
    - niin vektori $\bar{v} \times \bar{w}$ on keskisormen suuntainen.