Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

10.6.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Kertausta: Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Määritelmä

Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaisvektoriksi*.

Kertausta: Ominaisarvojen määrittäminen

- Muutetaan yhtälö $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ muotoon $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$.
- Milloin yhtälöllä on muita ratkaisuja kuin $\bar{v} = \bar{0}$?
- Vastaus: kun $A - \lambda I$ ei ole kääntyvä.
- Toisin sanoen: kun $\det(A - \lambda I) = 0$.

Kertausta: Esimerkki

- Etsitään matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
ominaisarvot.
- Ensinnäkin
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$
- Ominaisarvot ovat yhtälön $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ ratkaisut.
- Ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_2 = 2$.
- Kuhunkin ominaisarvoon liittyvät ominaisvektorit saadaan tämän jälkeen ratkaisemalla yhtälö(ryhmä) $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$.

Pistetulo

Määritelmä
Vektoreiden $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

Esimerkki

Määritä vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ pistetulo.

Pistetulon laskusääntöjä

Lause 1

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

a) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

b) $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$

c) $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$.

Pistetulon ominaisuuksia

Lause 2

Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

a) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$

b) $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Pikatehtäviä

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huoneen numero: 969797

1. Olkoon $W = \text{span}((1,2),(2,1),(1,1))$. Mikä on aliavaruuden W dimensio?
2. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat yhdensuuntaiset. Ovatko vektorit lineaarisesti riippumattomat?
3. Millä ehdolla matriisi $2A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on matriisin $3A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ käänteismatriisi?
4. Yhtälöryhmän matriisi näyttää porrasmuodossa seuraavalta:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right]$$

   Onko yhtälöryhmän ratkaisu yksikäsitteinen?

Pikatehtäviä

5. Yhtälöryhmän matriisi näyttää porrasmuodossa seuraavalta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Onko yhtälöryhmän ratkaisu yksikäsitteinen?

6. Matriisille A ja vektorille $\bar{v}$ pätee $A\bar{v} = \bar{0}$. Lisäksi A ei ole nollamatriisi. Mitä on $\bar{v}$?
7. Olkoon $W = \text{span}((3,1),(2,1),(-1,1))$. Mikä on eräs aliavaruuden W kanta?

Normi eli pituus

Määritelmä

Vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli *pituus* on

$$\| \bar{v} \| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

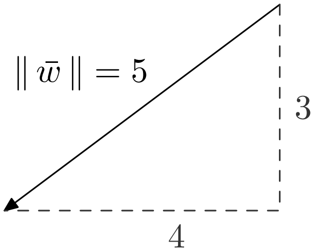
- **Huom.** Kyseessä on *määritelmä*, ei esimerkiksi lause tai laskusääntö.

Esimerkki

Määritä vektorin $\bar{v} = (-3, -4)$ normi.

Määritä vektorin $\bar{w} = (-1, \sqrt{2}, -2, 0)$ normi.

Normi



Normin ominaisuuksia

Lause 3

Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

(a) $\| \bar{v} \| \geq 0$

(b) $\| \bar{v} \| = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = 0$.

Lause 4

Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin $\| c\bar{v} \| = |c| \| \bar{v} \|$.

Yksikkövektori

Määritelmä

Vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ on *yksikkövektori*, jos sen normi on yksi eli

$$\| \bar{u} \| = 1.$$

- Esimerkiksi luonnollisen kannan vektorit $\bar{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ ovat yksikkövektoreita, mutta muitakin on.

Esimerkki

Etsitään yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen vektorin $\bar{v} = (2, -1, 0)$ kanssa.

Vektorien välinen etäisyys

Määritelmä

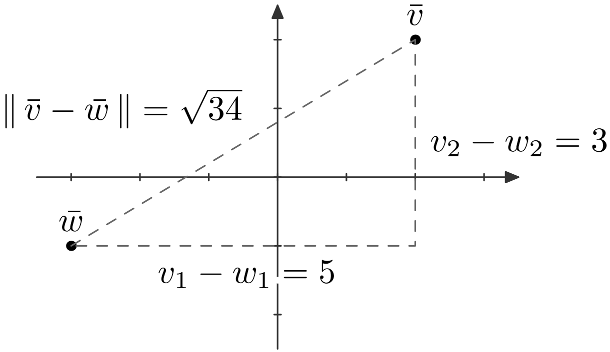
Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen *etäisyys* on

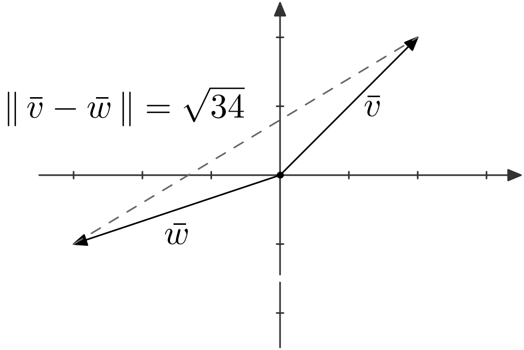
$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \| \, \bar{v} - \bar{w} \, \|.$$

- Kyseessä on jälleen *määritelmä*.

Esimerkki

Määritä vektoreiden $\bar{v} = (2, 2)$ ja $\bar{w} = (-3, -1)$ välinen etäisyys.


$\bar{v}$
$\| \bar{v} - \bar{w} \| = \sqrt{34}$
$v_2 - w_2 = 3$
$\bar{w}$
$v_1 - w_1 = 5$


$\| \bar{v} - \bar{w} \| = \sqrt{34}$
$\bar{v}$
$\bar{w}$