# Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

6.6.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

# Kertausta: Kääntyvien matriisien lause

## Lause 1

Oletetaan, että $A$ on $n \times n$ -neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

a) Matriisi $A$ on kääntyvä.

b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

d) Matriisi $A$ on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

e) Matriisi $A$ on alkeismatriisien tulo.

f) Matriisi $A$ ei ole riviekvivalentti sellaisen matriisin kanssa, jossa on nollarivejä.

**g) Matriisin $A$ determinantti ei ole nolla.**

## Kertausta: Determinantti

### Määritelmä

(a) Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

*determinantti* on $\det(A) = a$.

(b) Matriisin

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

determinantti on $\det(B) = ad - bc$.

# Kertausta: Determinantti

## Määritelmä

Matriisin

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

determinantti on $\det(C) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$.

# Kertausta: Determinantti

- Determinanttia voi merkitä myös pystyviivojen avulla.
- Esimerkiksi
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$
- Suurempien matriisien determinantit muodostetaan pienemmistä ns. kehityskaavojen avulla.
- Esimerkiksi

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

# Kertausta: Determinantti ja kääntyvyys

### Lause 2

Oletetaan, että $A$ on $n \times n$ -matriisi. Matriisi $A$ on kääntyvä, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.

# Kertausta: Determinantin ominaisuuksia

## Lause 3

Oletetaan, että $A$ ja $B$ ovat $n \times n$ -matriiseja. Tällöin

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

## Lause 4

Oletetaan, että matriisi $A$ on kääntyvä. Tällöin

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

## Lause 5

Oletetaan, että $A$ on $n \times n$ -matriisi. Tällöin

$$\det(A^T) = \det(A).$$

# Alkeisrivitoimitusten vaikutus determinanttiin

**Lause 6**

Oletetaan, että $A$ on neliömatriisi.

(a) Jos matriisi $B$ saadaan matriisista $A$ vaihtamalla kaksi riviä keskenään, niin $\det(B) = -\det(A)$.

(b) Jos matriisi $B$ saadaan matriisista $A$ kertomalla jokin rivi reaaliluvulla $t \neq 0$, niin $\det(B) = t\det(A)$.

(c) Jos matriisi $B$ saadaan matriisista $A$ lisäämällä johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla $k$ kerrottuna, niin $\det(B) = \det(A)$.

# Eräiden matriisien determinantteja

## Lause 7

Oletetaan, että $A$ on neliömatriisi. Tällöin

(a) jos matriisissa $A$ on nollarivi (nollasarake), niin $\det(A) = 0$

(b) jos matriisissa $A$ on kaksi samaa riviä (samaa saraketta), niin $\det(A) = 0$

(c) jos $A$ on kolmiomatriisi (eli kaikki lävistäjän alapuoliset tai yläpuoliset alkiot ovat nollia), niin matriisin $A$ determinantti on lävistäjäalkioiden tulo.

# Esimerkki

- Lasketaan matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

determinantti muuntamalla se vaiheittain porrasmatriisiksi.

# Esimerkki jatkuu

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Tuloksena on yläkolmiomatriisi, jonka determinantti on lävistäjäalkioiden tulo eli 4.
- Ainoastaan viimeinen alkeisrivitoimitus muutti matriisin determinanttia, ja se aiheutti vain etumerkin muutoksen.
- Siispä alkuperäisen matriisin determinantti oli $-4$.

# Ominaisarvot ja ominaisvektorit

## Määritelmä

Oletetaan, että $A$ on $n \times n$ -neliömatriisi. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin $A$ *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon $\lambda$ liittyväksi *ominaisvektoriksi*.

# Esimerkki

- Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvo 4, sillä

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Eräs ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori on siis $(1, 1)$.
- Toinen ominaisvektori olisi esim. $(2, 2)$, sillä

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

# Esimerkki jatkuu

- Matriisilla $A$ on toinenkin ominaisarvo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Siispä myös luku 2 on matriisin $A$ ominaisarvo.
- Vastaava ominaisvektori on esim. $(1, -1)$.

# Luentotehtävä 1

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huoneen numero: 969797

Mikä seuraavista matriiseista on kääntyvä?

A $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

# Luentotehtävä 2

Vektorit $\bar{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\bar{v}_2 = (0, 0, 2)$ ja $\bar{v}_3 = (4, 0, 3)$ virittävät aliavaruuden $W$. Mikä on $W$:n dimensio?

A 0

B 1

C 2

D 3

E en tiedä

# Ominaisarvojen määrittäminen

- Muutetaan yhtälö $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ muotoon $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$.
- Milloin yhtälöllä on muita ratkaisuja kuin $\bar{v} = \bar{0}$?
- Vastaus: kun $A - \lambda I$ ei ole kääntyvä.
- Toisin sanoen: kun $\det(A - \lambda I) = 0$.

# Esimerkki

- Etsitään matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

  ominaisarvot.

- Ensinnäkin

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

- Ominaisarvot ovat yhtälön $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ ratkaisut.
- Ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_2 = 2$.

# Esimerkki jatkuu

- Etsitään vielä ominaisarvoa $\lambda_1 = 4$ vastaavat ominaisvektorit.
- Ratkaistaan yhtälö $(A - 4I)\bar{v} = \bar{0}$.
- Muutetaan yhtälöryhmän matriisi porrasmuotoon

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

- Ratkaisu on $v_1 = t$, $v_2 = t$.
- Ominaisvektorit ovat siis muotoa $(t, t)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Samalla tavoin voitaisiin etsiä ominaisarvoa $\lambda_2 = 2$ vastaavat ominaisvektorit. Ne ovat muotoa $(t, -t)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

# Diagonalisointi

### Määritelmä

Neliömatriisia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kutsutaan *diagonalisoituvaksi*, jos on olemassa kääntyvä matriisi $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja lävistäjämatriisi $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, joille pätee

$$P^{-1}AP = D.$$

### Lause 8

Jos matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on $n$ lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, $A$ on diagonalisoituva. Tällöin $P$ koostuu matriisin $A$ ominaisvektoreista ja $D$ ominaisarvoista.

# Esimerkki

- Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

  on kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria $(1, 1)$ ja $(1, -1)$.
- Siispä $A$ on diagonalisoituva.
- Laittamalla ominaisvektorit sarakkeiksi saadaan matriisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- $P$:n käänteismatriisi on

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

# Esimerkki jatkuu

- Lasketaan matriisi $D = P^{-1}AP$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

- Matriisin $A$ ominaisvektorit näkyvät matriisin $D$ lävistäjällä.