Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

4.6.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Käytännön asioita

- Viimeiset harjoitukset on palautettava **torstaina 13.6.**
- Laskaripisteensä ja läsnäolonsa voi kukin tarkistaa kurssisivulle ilmestyvästä linkistä opiskelijanumeron loppuosan tai nimikirjainten perusteella.
- Viimeisten harjoitusten lisäksi ilmestyy kertaustehtäviä, joita ei tarvitse palauttaa. Niihin annetaan myös malliratkaisut ennen koetta.
- Ensi viikon keskiviikkona on koko päivä ohjausta. Silloin voi tehdä kertaustehtäviä tai palautettavia tehtäviä oman mielen mukaan.
- Kokeessa saa olla mukana A4-kokoinen lunttilappu. Ulkoa muistettavia "nippelitietoja" ei kuitenkaan kokeessa kysytä. Harjoitustehtävien osaaminen riittää.

Kertausta: Käänteismatriisin määrittäminen

- Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Tällöin siitä saadaan ykkösmatriisi alkeisrivitoimituksilla.
- On siis olemassa alkeismatriisit $E_1, \dots, E_k$, joille pätee

$$E_k \dots E_1 A = I.$$

- Kertomalla yhtälö oikealta A:n käänteismatriisilla saadaan

$$E_k \dots E_1 I = A^{-1}.$$

- Matriisin A kääntyvyyden selvittäminen ja käänteismatriisin etsiminen voidaan tehdä yhtä aikaa:

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}].$$

Kertausta: Esimerkki

- Onko matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

  käänteismatriisi?

- Eliminoidaan yhdistettyä matriisia:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

- Koska matriisi A saatiin muutettua alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Sen käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kertausta: Esimerkki

- Onko matriisilla
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
käänteismatriisi?
- Eliminoidaan yhdistettyä matriisia:
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$
- Koska saatiin nollarivi (vasemmalle puolelle), matriisi B ei ole kääntyvä.

Kertausta: Yhtälöryhmä käänteismatriisin avulla

- Käänteismatriisin avulla löydetään yhtälöryhmän yksikäsitteinen ratkaisu, jos sellainen on olemassa.

Menetelmä:

- Muutetaan yhtälöryhmä matriisimuotoon $A\bar{x} = \bar{b}$.
- Etsitään kerroinmatriisin A käänteismatriisi.
- Jos käänteismatriisia ei ole, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua tai ratkaisu ei ole yksikäsitteinen.
- Muussa tapauksessa ratkaisu on $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

Kertausta: Esimerkki

- Etsitään paraabeli, joka kulkee pisteiden $(1, 5)$, $(2, -2)$ ja $(3, 4)$ kautta.
- Sijoittamalla pisteet paraabelin yhtälöön $y = ax^2 + bx + c$ saadaan tuntemattomien a, b ja c yhtälöryhmä.
- Yhtälöryhmä vastaa matriisiyhtälöä $A\bar{x} = \bar{b}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- Kerroinmatriisi A on kääntyvä, ja sen käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 8 & -3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kertausta: Esimerkki jatkuu

- Yhtälöryhmän ratkaisu on siis

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 8 & -3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 \\ -53 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

- **Huom!** Jos pisteiden y-koordinaatit vaihtuvat, kerroinmatriisi ei muutu. Riittää siis laskea uudelleen vain tulo $A^{-1}\bar{b}$.
- Esimerkiksi pisteiden $(1, -2)$, $(2, 3)$ ja $(3, -5)$ kautta kulkeva paraabeli saadaan laskemalla

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 8 & -3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -13 \\ 49 \\ -40 \end{bmatrix}.$$

Kääntyvien matriisien lause

Lause 1

Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

a) Matriisi A on kääntyvä.

b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

f) Matriisi A ei ole riviekvivalentti sellaisen matriisin kanssa, jossa on nollarivejä.

Determinantti

- Determinantti on neliömatriisiin liittyvä luku, joka kertoo mm. matriisin kääntyvyydestä.
- Tällä kurssilla keskitytään pienten matriisien determinantteihin.

Määritelmä

(a) Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

determinantti on $\det(A) = a$.

(b) Matriisin

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

determinantti on $\det(B) = ad - bc$.

2×2 -matriisin determinantti

- Muistisääntö:

$$-$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$+$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Esimerkiksi matriisin

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti on $1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 4 + 2 = 6.$

3×3 -matriisin determinantti

Määritelmä

Matriisin

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

determinantti on $\det(C) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$.

- Esimerkiksi matriisin

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

  determinantti on

$$\begin{aligned} & -2(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2) - 3(0 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) + 2(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \\ & = -2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -17. \end{aligned}$$

Lisää determinantista

- Determinanttia voi merkitä myös pystyviivojen avulla.
- Esimerkiksi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

- Suurempien matriisien determinantit muodostetaan pienemmistä ns. kehityskaavojen avulla.
- Esimerkiksi

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Determinantti kertoo kääntyvyydestä

Lause 2

Oletetaan, että A on $n \times n$ -matriisi. Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.

Esimerkki

- Tutkitaan, onko vektorien vektorijono $((2, 1, -1), (0, 1, -3), (-2, 1, -5))$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.
- On tarkistettava, voidaanko jokainen vektori $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ ilmaista annettujen vektorien lineaarikombinaationa.
- Saadaan yhtälöryhmä $A\bar{x} = \bar{w}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki jatkuu

- Lasketaan determinantti:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \cdots = 0.$$

- Koska determinantti on 0, kerroinmatriisi A ei ole kääntyvä, joten yhtälöryhmällä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua.
- Siispä vektorijono ei ole kanta.

Luentotehtävä 1

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huoneen numero: 969797

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n}$. Mitkä seuraavista voidaan varmasti laskea?

(1) AC (2) $B^{\top}C$ (3) $A\bar{v}$ (4) AC^{-1} (5) $\bar{v}B$

A Kaikki paitsi (2)

B Vain (1) ja (3)

C Vain (1), (3) ja (4)

D Vain (1), (2) ja (3)

E Vain (1), (2) ja (5)

Luentotehtävä 2

Olkoot $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Oletetaan, että vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu. Mikä seuraavista **ei voi** pitää paikkaansa?

A Vektori $\bar{v}_1$ voidaan esittää vektorien $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa.

B Yhtälö $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ pätee, jos $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ ja $c_3 = 0$.

C Yhtälöstä $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ saatavan yhtälöryhmän kerroinmatriisi on kääntyvä.

D Yhtälöstä $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ saatavalla yhtälöryhmällä on ainakin kaksi ratkaisua.

E Yhtälöstä $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ saatavan yhtälöryhmän kerroinmatriisi voidaan muuttaa porrasmatriisiksi.

Determinantin ominaisuuksia

Lause 3

Oletetaan, että A ja B ovat $n \times n$ -matriiseja. Tällöin

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Lause 4

Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Tällöin

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Lause 5

Oletetaan, että A on $n \times n$ -matriisi. Tällöin

$$\det(A^T) = \det(A).$$