Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

3.6.2013

HY / Avoin yliopisto
Jokke Häsä

Kertausta: Sarakevektorit

- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ voidaan samastaa matriisin
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$
kanssa.
- Joukon $\mathbb{R}^{n\times 1}$ alkioita kutsutaan *sarakevektoreiksi*.
- Vektoria $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ voidaan kertoa matriisilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Kertausta: Esimerkki

- Lasketaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja vektorin $\bar{v} = (-5, 3)$ tulo.

Kertausta: Matriisikertolasku ja lineaariset yhtälöryhmät

- Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

- Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Kertausta: Matriisikertolasku ja lineaariset yhtälöryhmät

- Nähdään, että

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

- Yhtälöryhmä voidaan siis kirjoittaa muodossa $A\bar{x} = \bar{b}$.

Kertausta: Kääntyvyyden vaikutus yhtälöryhmään

Lause 1

Jos matriisi A on kääntyvä, yhtälöllä on $A\bar{x} = \bar{b}$ täsmälleen yksi ratkaisu.

- Jos yhtälöryhmälle halutaan täsmälleen yksi ratkaisu, riittää tutkia kerroinmatriisia A.

Alkeismatriisit

Määritelmä

Matriisi on *alkeismatriisi*, jos se on saatu ykkösmatriisista yhdellä alkeisrivitoimituksella.

- Esimerkiksi matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  on alkeismatriisi.
- Se on saatu ykkösmatriisista tekemällä alkeisrivitoimitus $-\frac{1}{2}R_3$.

Tehtävä

- Minkä alkeisrivitoimituksen avulla seuraavat alkeismatriisit on saatu ykkösmatriisista?

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Laske tulot EA ja FB. Mitä huomaat?

Alkeismatriisien ominaisuuksia

Lemma 2

Alkeismatriisilla kertominen vastaa alkeisrivitoimituksen tekemistä.

Lause 3

Alkeismatriisit ovat kääntyviä, ja alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi.

Todistuksen idea: jokaisella alkeisrivitoimituksella on ”käänteistoimitus”.

Esimerkki

- Etsitään alkeismatriisin

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  käänteismatriisi.
- Käänteismatriisi on

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Tämän voi vielä varmistaa laskemalla, että $EF = I$ ja $FE = I$.

Kääntyvien matriisien lause

Lause 4

Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

a) Matriisi A on kääntyvä.

b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

f) Matriisi A ei ole riviekvivalentti sellaisen matriisin kanssa, jossa on nollarivejä.

Luentokysymys 1

- Osoite: `m.socrative.com`
- Huoneen numero: 969797

Minkälaisia olivat kolmannen viikon harjoitustehtävät?

A Liian työläitä

B Työläitä, mutta se oli hyvä

C Eivät työläitä, mutteivät helppojakaan

D Helppoja, mutta se oli hyvä

E Liian helppoja

Luentokysymys 2

Matriiseista on pyyhkiytynyt numeroita. Mikä luku on oltava paikassa a, jotta seuraava yhtälö pätisi?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & * & -2 \\ 0 & * & * & 1 \\ -3 & * & 1 & 3 \\ * & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & * & * \\ 1 & a & 5 & -1 \\ * & 5 & -1 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & -9 & 2 & -1 \\ * & -13 & * & 0 \\ 22 & 3 & * & 2 \\ 10 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

A 5

B -7

C -9

D 5 tai -7

E ei voida määrittää

Käänteismatriisin määrittäminen

- Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Tällöin siitä saadaan ykkösmatriisi alkeisrivitoimituksilla.
- On siis olemassa alkeismatriisit $E_1, \ldots, E_k$, joille pätee

$$E_k \ldots E_1 A = I.$$

- Kertomalla yhtälö oikealta käänteismatriisilla saadaan

$$A^{-1} = E_k \ldots E_1 I.$$

- Matriisin A kääntyvyyden selvittäminen ja käänteismatriisin etsiminen voidaan tehdä yhtä aikaa:

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}].$$

Esimerkki

- Onko matriisilla
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
käänteismatriisi?
- Eliminoidaan yhdistettyä matriisia:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$
- Koska matriisi A saatiin muutettua alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Sen käänteismatriisi on
$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki

- Onko matriisilla
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
  käänteismatriisi?
- Eliminoidaan yhdistettyä matriisia:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

- Koska saatiin nollarivi (vasemmalle puolelle), matriisi B ei ole kääntyvä.

Yhtälöryhmän ratkaiseminen käänteismatriisin avulla

- Käänteismatriisin avulla löydetään yhtälöryhmän yksikäsitteinen ratkaisu, jos sellainen on olemassa.
- Voidaan soveltaa, jos tuntemattomia on yhtä paljon kuin yhtälöitä.
- (Huom. Jos tuntemattomia on enemmän kuin yhtälöitä, yksikäsitteistä ratkaisua ei ole. Jos tuntemattomia on vähemmän, voidaan lisätä ylimääräisiä tuntemattomia.)

Itse menetelmä:

- Muutetaan yhtälöryhmä matriisimuotoon $A\bar{x} = \bar{b}$.
- Etsitään kerroinmatriisin A käänteismatriisi.
- Jos käänteismatriisia ei ole, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua tai ratkaisu ei ole yksikäsitteinen.
- Muussa tapauksessa ratkaisu on $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

Esimerkki

- Etsitään paraabeli, joka kulkee pisteiden $(1, 5)$, $(2, -2)$ ja $(3, 4)$ kautta.
- Sijoittamalla pisteet paraabelin yhtälöön $y = ax^2 + bx + c$ saadaan tuntemattomien a, b ja c yhtälöryhmä.
- Yhtälöryhmä vastaa matriisiyhtälöä $A\bar{x} = \bar{b}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- Kerroinmatriisi A on kääntyvä, ja sen käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 8 & -3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki jatkuu

- Yhtälöryhmän ratkaisu on siis

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 8 & -3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 \\ -53 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

- **Huom!** Jos pisteiden y-koordinaatit vaihtuvat, kerroinmatriisi ei muutu. Riittää siis laskea uudelleen vain tulo $A^{-1}\bar{b}$.
- Esimerkiksi pisteiden $(1, -2)$, $(2, 3)$ ja $(3, -5)$ kautta kulkeva paraabeli saadaan laskemalla

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 8 & -3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -13 \\ 49 \\ -40 \end{bmatrix}.$$