12 Ominaisarvot ja diagonalisointi[2]

Tässä luvussa tarkastellaan neliömatriisin ominaisarvoja ja diagonalisointia. Sovelluksena esitetään laskumenetelmä diagonalisoituvan matriisin potensseille. Ominaisarvoja tarkastellaan lisää kurssin toisessa osassa.

12.1 Ominaisarvon määritelmä

Matriisin ominaisarvoista puhutaan silloin, kun matriisilla kertominen vaikuttaa johonkin vektorin samalla tavalla kuin skalaarilla kertominen. Tuo vektori on silloin matriisin ominaisvektori ja vastaava skalaari on matriisin ominaisarvo.

Määritelmä 12.1. Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaisvektoriksi.*

Huom. 1. Edellinen määritelmä on sekä ominaisarvon että ominaisvektorin määritelmä. Ominaisarvoa ei voida määritellä ilman ominaisvektoreita eikä ominaisvektoreista voida puhua mainitsematta, mihin ominaisarvoon ne liittyvät.

Huom. 2. Nollavektorin ei haluta olevan ominaisvektori, sillä jos niin olisi, kaikki reaaliluvut olisivat kaikkien matriisien ominaisarvoja, koska $A\bar{0} = \lambda\bar{0}$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 12.2. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvo 4, sillä

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eräs ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori on siis $(1, 1)$.

Samaa ominaisarvoa voi vastata useampi eri ominaisvektori. Esimerkiksi $(2, 2)$ on myös matriisin A ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori, sillä

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Matriisilla A on toinenkin ominaisarvo. Huomataan nimittäin, että

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Siten myös luku 2 on matriisin A ominaisarvo.

[2] Tätä lukua ei ole vuoden 2012 materiaalissa.

Kuten edellinen esimerkki osoittaa, matriisilla voi olla useampi kuin yksi ominaisarvo. Kuhunkin ominaisarvoon liittyvät omat ominaisvektorit, ja myös niitä on kullakin ominaisarvolla useita.

12.2 Ominaisarvojen löytäminen

Ominaisarvojen ja ominaisvektoreiden löytäminen perustuu yhtälön

$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \bar{0} \tag{9}$$

ratkaisemiseen. Ominaisvektoria $\bar{v}$ ei kuitenkaan voida ratkaista ennen kuin tunnetaan ominaisarvo λ. Sen löytämiseksi muutetaan yhtälö hieman toiseen muotoon. Ensinnäkin huomataan, että $\lambda\bar{v} = \lambda I\bar{v}$, missä I on ykkösmatriisi. Näin ollen

$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = A\bar{v} - \lambda I\bar{v} = (A - \lambda I)\bar{v}.$$

Nyt yhtälö (9) tulee muotoon

$$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}. \tag{10}$$

Yhtälöä (10) vastaa homogeeninen yhtälöryhmä, joten sillä on aina triviaaliratkaisu $\bar{v} = \bar{0}$. Tämä ei kuitenkaan kelpaa ominaisvektoriksi, joten tavoitteena on löytää jokin epätriviaali ratkaisu. Lauseen 10.7 nojalla yhtälöllä on epätriviaaleja ratkaisuja täsmälleen silloin, kun kerroinmatriisi $A - \lambda I$ ei ole kääntyvä. Toisaalta lauseen 11.3 mukaan neliömatriisi ei ole kääntyvä täsmälleen silloin, kun sen determinantti on 0. Näin saadaan seuraava lause.

Lause 12.3. *Reaaliluku λ on neliömatriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esimerkki 12.4. Määritetään esimerkin 12.2 matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Lähdetään liikkeelle laskemalla lauseessa 12.3 mainittu determinantti:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8.$$

Ominaisarvot ovat nyt toisen asteen yhtälön $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ ratkaisut. Ne ovat $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_2 = 2$.

Määritetään vielä ominaisvektorit. Kumpaakin ominaisarvoa vastaavat omat ominaisvektorinsa. Tarkastellaan ensin ominaisarvoa λ_1. Tällöin ratkaistavana on yhtälö $(A - 4I)\bar{v} = \bar{0}$. Muutetaan matriisi $A - 4I$ redusoituun porrasmuotoon:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2+R1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1\leftrightarrow R2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Redusoidusta porrasmuodosta nähdään, että v_2 on vapaa muuttuja ja $v_1 - v_2 = 0$. Ominaisvektorit ovat siis muotoa (t, t), missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tarkastellaan sitten ominaisarvoa $\lambda_2 = 2$. Nyt ratkaistavana oleva yhtälö on $(A - 2I)\bar{v} = \bar{0}$. Muutetaan matriisi $A - 2I$ redusoituun porrasmuotoon:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2-R1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jälleen nähdään, että v_2 on vapaa muuttuja ja $v_1 + v_2 = 0$. Tällä kertaa ominaisvektorit ovat siis muotoa $(t, -t)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Huom. Jos λ on matriisin A ominaisarvo, yhtälöllä 10 on äärettömän monta ratkaisua. Itse asiassa jokainen ominaisvektorin $\bar{v}$ skalaarimonikerta on myös ominaisvektori, sillä $A(c\bar{v}) = c(A\bar{v}) = c(\lambda\bar{v}) = \lambda(c\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$.

Lauseke $\det(A - \lambda I)$ on eräs muuttujan λ polynomi. Sitä nimitetään matriisin A *karakteristiseksi polynomiksi.* Edellinen lause voidaan siis muotoilla myös niin, että matriisin A ominaisarvot ovat sen karakteristisen polynomin nollakohdat.

12.3 Diagonalisointi

Määritelmä 12.5. Neliömatriisia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kutsutaan *diagonalisoituvaksi*, jos on olemassa kääntyvä matriisi $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja lävistäjämatriisi $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, joille pätee

$$P^{-1}AP = D.$$

Diagonalisoituvuuden määrittäminen perustuu seuraavaan tulokseen.

Lause 12.6. *Neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on diagonalisoituva, jos ja vain jos sillä on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Tällöin*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

missä matriisin $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sarakkeet koostuvat A:n lineaarisesti riippumattomista ominaisvektoreista ja $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ ovat niitä vastaavat ominaisarvot samassa järjestyksessä.

Todistuksen idea. Merkitään matriisin A lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$. Nämä siis muodostavat matriisin P sarakkeet. Siitä, että kyseiset sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat, voidaan johtaa, että homogeenisella yhtälöryhmällä $P\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaaliratkaisu. Tästä puolestaan seuraa, että P on kääntyvä.

Matriisikertolaskun määritelmästä seuraa, että matriisin AP i:s sarake on $A\bar{v}_i$ ja että matriisin PD vastaava sarake on $\lambda_i\bar{v}_i$. Koska $A\bar{v}_i = \lambda_i\bar{v}_i$, saadaan yhtälö $AP = PD$. Väite seuraa, kun kerrotaan tämä yhtälö vasemmalta matriisilla P^{-1}. □

Esimerkki 12.7. Esimerkin 12.4 matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit $(1, 1)$ ja $(1, -1)$, jotka vastaavat ominaisarvoja 4 ja 2. Lauseen 12.6 nojalla A on diagonalisoituva. Muodostetaan ominaisvektoreista matriisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriisin P käänteismatriisi saadaan esimerkiksi lauseen 9.12 avulla. Se on

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan nyt tulo

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tuloksena on ominaisarvoista koostuva lävistäjämatriisi, aivan kuten pitääkin.

Esimerkki 12.8 (Diagonalisoituvan matriisin potenssit)**.** Jatketaan edellistä esimerkkiä ja lasketaan matriisin A seitsemäs potenssi. Suora matriisikertolasku olisi työläs suorittaa, mutta koska matriisi A on diagonalisoituva, voidaan käyttää hyväksi sen ominaisarvoja.

Ensinnäkin huomataan melko helposti, että

$$D^7 = \begin{bmatrix} 4^7 & 0 \\ 0 & 2^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16384 & 0 \\ 0 & 128 \end{bmatrix}.$$

(Vastaava pätee kaikille neliömatriiseille.) Toisaalta yhtälöstä $D = P^{-1}AP$ saadaan $A = PDP^{-1}$, ja

$$(PDP^{-1})^7 = PD \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{=I_2} DP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^7P^{-1}.$$

Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned} A^7 = (PDP^{-1})^7 = PD^7P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16384 & 0 \\ 0 & 128 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16384 & 128 \\ 16384 & -128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16512 & 16256 \\ 16256 & 16512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8256 & 8128 \\ 8128 & 8256 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisipotenssin laskeminen saatiin muutettua pariksi matriisikertolaskuksi sekä tavallisten kokonaislukujen potenssiksi. Samalla vaivalla voitaisiin laskea paljon suurempiakin potensseja. Tämä temppu onnistuu kuitenkin vain, jos alkuperäinen matriisi on diagonalisoituva.