9 Matriisit

Aiemmissa luvuissa matriiseja on käsitelty siinä määrin kuin on ollut tarpeellista yhtälönratkaisun kannalta. Matriiseja käytetään kuitenkin myös muihin tarkoituksiin, ja siksi on hyödyllistä selvittää, minkälaisia ominaisuuksia matriiseilla itsellään on. Samalla saadaan joitakin uusia tapoja myös yhtälöryhmien ratkaisujen tutkimiseen.

Reaalialkioinen $m \times n$ *-matriisi* on reaalilukutaulukko, jossa on m riviä ja n saraketta. Esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

on $m \times n$ -matriisi. Voidaan myös sanoa, että matriisin A *tyyppi* on $m \times n$. Kaikkien reaalikertoimisten $m \times n$ -matriisien joukkoa merkitään $\mathbb{R}^{m \times n}$. Matriisissa olevia lukuja kutsutaan matriisin *alkioiksi*, ja rivillä i sarakkeessa j olevaa alkiota merkitään $A(i, j)$. Esimerkiksi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 11 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}$$

on reaalikertoiminen 4×3 -matriisi eli $B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$. Nähdään, että $B(1, 3) = 5$ ja $B(2, 2) = 11$.

9.1 Matriisien laskutoimituksia

Matriiseille, kuten vektoreillekin, voidaan määritellä erilaisia laskutoimituksia. Osa niistä muistuttaa läheisesti vektorien vastaavia laskutoimituksia.

Matriisien yhteenlasku

Matriisien *yhteenlasku* määritellään seuraavasti. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matriisien A ja B summa saadaan laskemalla yhteen samoissa kohdissa olevat alkiot. Tuloksena on $m \times n$ -matriisi $A + B$, jolle pätee

$$(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$$

kaikilla $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Huom. Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen.

Skalaarikertolasku

Minkä tahansa matriisin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ voi kertoa reaaliluvulla c, ja tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi*. Saatava tulos on $m \times n$ -matriisi cA, jota nimitetään matriisin A *skalaarimonikerraksi* ja jolle pätee

$$(cA)(i,j) = c \cdot A(i,j)$$

kaikilla $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$. Esimerkiksi

$$2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisia $(-1)A$ on tapana merkitä $-A$ ja matriisisummaa $A + (-B)$ on tapana merkitä $A - B$.

Matriisikertolasku

Matriiseille voidaan määritellä myös *matriisikertolasku*. Tämä laskutoimitus on hieman monimutkaisempi kuin edellä määritellyt eikä mitään vastaavaa ole olemassa vektoreille.

Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään vain, jos ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä. Olkoot siis $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Tällöin tulo AB on $m \times p$ -matriisi, jolle pätee

$$\begin{aligned}(AB)(i,j) &= A(i,1)B(1,j) + A(i,2)B(2,j) + \cdots + A(i,n)B(n,j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j)\end{aligned}$$

kaikilla $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,p\}$.[1]

Esimerkki 9.1. Lasketaan matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tulo. Koska matriisissa A on kolme saraketta (tyyppi 2×3) ja matriisissa B on vastaavasti kolme riviä (tyyppi 3×2), matriisit voidaan kertoa keskenään. Tulos-

[1] Merkintä $\sum_{k=1}^{n} c_k$ tarkoittaa summaa $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

matriisi on tyyppiä 2×2. Määritelmän mukaan

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 9.2. Matriisikertolasku ei ole vaihdannainen operaatio eli tulon tekijöiden järjestystä ei voi vaihtaa. Tarkastellaan vaikkapa matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla tulo molemmin päin huomataan, että

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{mutta} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Siten $AB \neq BA$.

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi ja $k \in \{1, 2, \dots\}$. Tällöin voidaan matriisitulon avulla määritellä *matriisipotenssi*

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ kpl}}.$$

9.2 Erityisiä matriiseja

Matriiseja, joiden kaikki alkiot ovat nollia, eli jotka ovat muotoa

$$O_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

kutsutaan *nollamatriiseiksi*. *Ykkösmatriiseja* puolestaan ovat matriisit

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Ykkösmatriiseja kutsutaan usein myös *yksikkömatriiseiksi*.

Huom. 1. Nollamatriisi voi olla mitä tahansa tyyppiä. Sen sijaan yksikkömatriisissa on aina yhtä paljon rivejä ja sarakkeita.

Huom. 2. Jos matriisien tyypeistä ei ole epäselvyyttä, saatetaan merkitä yksinkertaisemmin $O_{m\times n} = O$ ja $I_n = I$.

Ei ole vaikea nähdä, että nollamatriisit käyttäytyvät matriisien yhteenlaskun suhteen samalla tavalla kuin nolla lukujen yhteenlaskussa (tai nollavektori vektorien yhteenlaskussa): sellaisen lisääminen toiseen samantyyppiseen matriisiin ei muuta tuota toista matriisia mitenkään. Samalla tavoin ykkösmatriisit käyttäytyvät matriisikertolaskussa aivan kuten reaaliluku 1 tavallisessa kertolaskussa. Kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pätee nimittäin

$$I_m A = A \quad \text{ja} \quad AI_n = A.$$

Eri puolilta kerrottaessa on matriisikertolaskun rajoituksen vuoksi käytettävä eri kokoista ykkösmatriisia.

Neliömatriisi on matriisi, jossa on yhtä monta riviä ja saraketta. Esimerkiksi ykkösmatriisit ovat neliömatriiseja.

Neliömatriisin alkio on *lävistäjällä*, jos alkion rivin ja sarakkeen numerot ovat samat. Matriisi, jonka kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat lävistäjällä, on *lävistäjämatriisi*. Lävistäjämatriisi, jonka kaikki lävistäjäalkiot ovat samoja, on puolestaan *skalaarimatriisi*. Skalaarimatriisit ovat ykkösmatriisin skalaarimonikertoja. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

on lävistäjämatriisi ja

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3$$

on skalaarimatriisi.

9.3 Matriisien laskusääntöjä

Matriisien laskutoimitukset noudattavat tiettyjä sääntöjä, jotka monessa kohdassa muistuttavat lukujen laskusääntöjä.

Lause 9.3. *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A, B ja C sekä reaaliluvulle a, jos laskutoimitukset on määritelty:*

a) $A + B = B + A$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) $A(BC) = (AB)C$

d) $A(B+C) = AB + AC$

e) $(A+B)C = AC + BC$

f) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

Huom. Kuten aiemmin on jo mainittu, yleisessä tapauksessa $AB \neq BA$, eli tulon vaihdannaisuus ei päde matriiseilla.

Todistus. Osoitetaan esimerkin vuoksi kohta d). Muiden kohtien tarkistaminen jätetään lukijalle.

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Nyt $A(B+C)$ ja $AB + AC$ ovat molemmat $m \times p$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}
\big(A(B+C)\big)(i,j) &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k) \cdot (B+C)(k,j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)\big(B(k,j) + C(k,j)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(A(i,k)B(k,j) + A(i,k)C(k,j)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j) + \sum_{k=1}^{n} A(i,k)C(k,j) \\
&= (AB)(i,j) + (AC)(i,j) \\
&= (AB + AC)(i,j).
\end{aligned}$$

Koska matriisit $A(B+C)$ ja $AB+AC$ ovat samaa tyyppiä ja niillä on täsmälleen samat alkiot, pätee $A(B+C) = AB + AC$. □

9.4 Matriisin transpoosi

Määritelmä 9.4. Oletetaan, että A on $m \times n$ -matriisi. Sen *transpoosi* $A^\top$ on $n \times m$-matriisi, joka saadaan vaihtamalla matriisin A rivit ja sarakkeet keskenään.

Esimerkiksi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transpoosi on

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 9.5. Neliömatriisin A sanotaan olevan *symmetrinen*, jos $A^\top = A$. Neliömatriisin A sanotaan olevan *antisymmetrinen*, jos $A^\top = -A$.

Esimerkki 9.6. Merkitään

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$B^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = B \quad \text{ja} \quad C^\top = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = -C.$$

Siis B on symmetrinen ja C on antisymmetrinen.

Transpoosioperaation käyttäytymistä matriisien laskutoimitusten kanssa valottaa seuraava lause.

Lause 9.7. *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A ja B sekä reaaliluvulle t, jos laskutoimitukset on määritelty (ts. matriisit ovat sopivaa tyyppiä):*

a) $(A^\top)^\top = A$

b) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$

c) $(AB)^\top = B^\top A^\top$

d) $(tA)^\top = t(A^\top)$.

Huom. Erityisesti kannattaa painaa mieleen tulon tekijöiden järjestyksen vaihtuminen kohdassa c).

Todistus. Osoitetaan todeksi kohta c) ja jätetään loput kohdat lukijalle. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Nyt sekä $(AB)^\top$ että $B^\top A^\top$ ovat molemmat $p \times m$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ja $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned} (AB)^\top(i, j) &= (AB)(j, i) = \sum_{k=1}^{n} A(j, k) \cdot B(k, i) = \sum_{k=1}^{n} A^\top(k, j) \cdot B^\top(i, k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} B^\top(i, k) \cdot A^\top(k, j) = (B^\top A^\top)(i, j). \end{aligned}$$

Siten $(AB)^\top = B^\top A^\top$. □

9.5 Käänteismatriisi

Matriiseille ei ole määritelty jakolaskua. Joissakin tapauksissa tämä puute voidaan korjata käyttämällä niin sanottuja käänteismatriiseja, jotka toimivat samalla tavalla kuin käänteisluvut tavallisten lukujen kertolaskussa. Toisin sanoen käänteismatriisilla kertominen ajaa saman asian kuin jakaminen. Pian tullaan kuitenkin valitettavasti huomaamaan, että kaikilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia. Kaiken lisäksi on kätevintä rajoittua tarkastelemaan vain neliömatriiseja.

Määritelmä 9.8. Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa saman tyyppinen neliömatriisi B, jolle pätee

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

sanotaan, että A on *kääntyvä* ja B on matriisin A *käänteismatriisi.*

Esimerkki 9.9. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi on

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

sillä

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lause 9.10. *Matriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi.*

Todistus. Oletetaan, että matriisilla A on käänteismatriisit B ja B'. Nyt

$$B = BI = B(AB') = (BA)B' = IB' = B'.$$

Yllä olevan yhtälöketjun perusteella B ja B' ovat välttämättä sama matriisi. Näin ollen A:n käänteismatriiseja ei voi olla enempää kuin yksi. □

Jos matriisi A on kääntyvä, sen käänteismatriisille käytetään merkintää A^{-1}. Huomaa, että merkintää A^{-1} ei voi käyttää ennen kuin on varmistanut, että matriisi A todella on kääntyvä.

Seuraava lause auttaa joidenkin matriisien käänteismatriisien löytämisessä.

Lause 9.11. *Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä. Tällöin myös matriisit A^{-1}, AB ja $A^{\top}$ ovat kääntyviä, ja niiden käänteismatriisit ovat seuraavat:*

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$.

Todistus. Lauseen matriisit osoitetaan kääntyviksi näyttämällä kussakin tapauksessa, että väitetty käänteismatriisi todella on matriisin käänteismatriisi.

a) Osoitetaan matriisi A^{-1} kääntyväksi näyttämällä, että sen käänteismatriisi on A. Koska $A^{-1}A = I$ ja $AA^{-1} = I$, on A matriisin A^{-1} käänteismatriisi eli $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) Matriisia AB koskevan väitteen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

c) Osoitetaan, että matriisin $A^\top$ käänteismatriisi on $(A^{-1})^\top$. Lauseen 9.7 nojalla pätee

$$A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I^\top = I.$$

Samalla tavalla osoitetaan, että $(A^{-1})^\top A^\top = I$. Siten $(A^{-1})^\top$ on matriisin $A^\top$ käänteismatriisi. Tästä seuraa myös, että matriisi $A^\top$ on kääntyvä. □

Matriiseille, joiden tyyppi on 2×2, on olemassa erityinen kaava käänteismatriisin löytämiseksi.

Lause 9.12. *Matriisi*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, jos ja vain jos $ad - bc \neq 0$. Jos matriisi A on kääntyvä, sen käänteismatriisi on

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Todistus. Oletetaan, että $ad - bc \neq 0$. Merkitään

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voidaan todeta, että $AB = I$ ja $BA = I$. Siten B on matriisin A käänteismatriisi ja A on kääntyvä.

Oletetaan sitten, että $ad - bc = 0$. Nyt on tutkittavana kaksi eri tapausta: joko $a = 0$ tai $a \neq 0$. Jos $a = 0$, niin $bc = 0$. Siten joko $b = 0$ tai $c = 0$. Tällöin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{tai} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Kummassakaan tapauksessa ei ole olemassa matriisia B, jolle pätee $AB = I$. Tuloon AB tulee nimittäin välttämättä nollarivi tai nollasarake. Siten A ei ole kääntyvä.

Tutkitaan sitten tapaus $a \neq 0$. Nyt $d = bc/a$ ja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & bc/a \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että on olemassa sellainen matriisi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

että $AB = I$. Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & bc/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+bcz/a & cy+bcw/a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

eli

$$\begin{cases} ax+bz = 1 \\ ay+bw = 0 \\ cx+bcz/a = 0 \\ cy+bcw/a = 1. \end{cases}$$

Kolmannen yhtälön perusteella $c(x+bz/a) = 0$. Jos $c = 0$, päädytään samankaltaiseen tilanteeseen kuin silloin, kun $a = 0$. Siten voidaan olettaa, että $c \neq 0$. Tällöin täytyy päteä $x + bz/a = 0$ eli $x = -bz/a$. Toisaalta ensimmäisen yhtälön perusteella $x = (1 - bz)/a$. Nyt $-bz = 1 - bz$, joten $1 = 0$. Tämä on mahdotonta. Siten matriisilla A ei ole käänteismatriisia. $\square$

Suurempien matriisien käänteismatriisien laskemiseksi ei ole yhtä helppoa kaavaa. Käänteismatriisin määrittämistä käsitellään lisää luvussa 10.2.

9.6 Sarakevektorit

Usein avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ samastetaan matriisin

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

kanssa. Joukon $\mathbb{R}^{n\times 1}$ matriiseja kutsutaan *sarakevektoreiksi.* Kun avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita ajatellaan sarakevektoreina, voi niitä kertoa matriiseilla: jos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, on tulo $A\bar{v}$ määritelty, kun $\bar{v}$ tulkitaan joukon $\mathbb{R}^{n\times 1}$ alkioksi.

Esimerkki 9.13. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja vektorin $\bar{v} = (-5, 3)$ tulo on

$$A\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Tämä sarakevektori voidaan samastaa vektorin $(2, 5, 13)$ kanssa.