8 Kanta

Tässä luvussa tarkastellaan aliavaruuden virittäjävektoreita, jotka muodostavat lineaarisesti riippumattoman jonon. Merkintöjen helpottamiseksi oletetaan luvussa koko ajan, että W on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$ virittämä avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus eli

$$W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m).$$

Määritelmä 8.1. Olkoot $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k \in W$. Vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W *kanta*, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$

b) jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

Esimerkki 8.2. Esimerkissä 6.1 osoitettiin, että vektorit $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$. Jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on lisäksi vapaa esimerkin 7.2 perusteella. Siten $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Vastaavasti avaruudella $\mathbb{R}^n$ on kanta

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n).$$

Tässä $\bar{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, missä luku 1 on vektorin i:s komponentti. Kantaa kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *luonnolliseksi kannaksi*. Lukijan tehtäväksi jätetään osoittaa, että kyseessä on todellakin kanta.

Kannan vektorit siis virittävät aliavaruuden, ja lisäksi kanta on vapaa. Lauseesta 7.6 saadaan seuraava hyvin käyttökelpoinen tulos:

Lause 8.3. *Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Tällöin kannan määritelmän nojalla $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ ja jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on vapaa. Lauseesta 7.6 seuraa, että jokainen aliavaruuden $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ vektori voidaan kirjoittaa tasan yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa. Tästä seuraa heti, että $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$. Nyt lauseen 7.6 mukaan jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on vapaa. Näin kannan määritelmän molemmat ehdot täyttyvät. Siis $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. □

Esimerkki 8.4. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$. Osoitetaan lauseen 8.3 avulla, että $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Ratkaistaan yhtälö $x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 = \bar{v}$ eli yhtälö $x_1(2,-1) + x_2(1,3) = (v_1, v_2)$. Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = v_1 \\ -x_1 + 3x_2 = v_2. \end{cases}$$

Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(3v_1 - v_2) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(v_1 + 2v_2) \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu riippumatta vektorista $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Siis jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

8.1 Koordinaatit

Kun aliavaruuden vektori kirjoitetaan kannan vektorien lineaarikombinaationa, kertoimia kutsutaan vektorin koordinaateiksi.

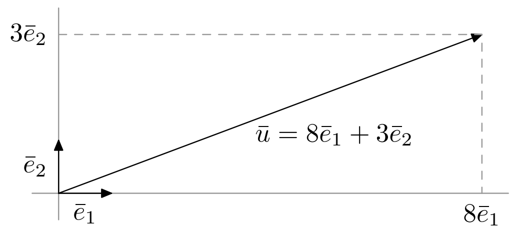
Määritelmä 8.5. Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in W$. Vektorin $\bar{u}$ *koordinaateiksi kannan* $\mathcal{B}$ *suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \ldots, a_k$, joilla

$$\bar{u} = a_1\bar{w}_1 + \cdots + a_k\bar{w}_k\,.$$

Huom. Vektorin koordinaatit jonkin tietyn kannan suhteen ovat yksikäsitteiset, sillä vektori voidaan lauseen 8.3 mukaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Vektorilla on siis kunkin tietyn kannan suhteen vain yhdet koordinaatit. Eri kantojen suhteen saman vektorin koordinaatit voivat tietenkin olla erilaisia.

Esimerkki 8.6. Määritetään vektorin $\bar{u} = (8,3)$ koordinaatit avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollisen kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen. Koordinaatit ovat 8 ja 3, sillä

$$\bar{u} = 8(1,0) + 3(0,1) = 8\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2.$$



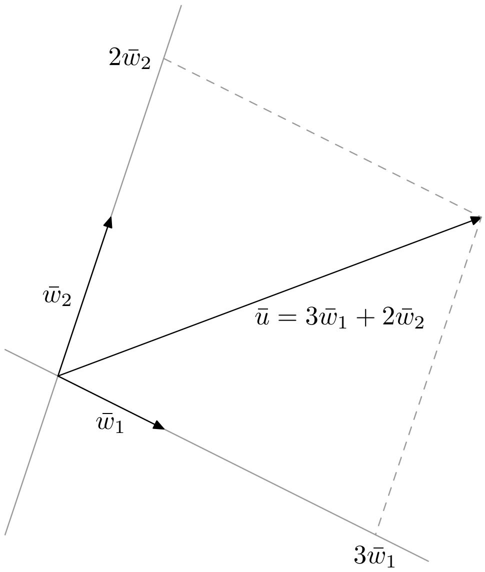
Kuva 8.21: Vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen ovat 8 ja 3.

Tutkitaan sitten vektorin $\bar{u}$ koordinaatteja jonkin toisen kannan suhteen. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$. Esimerkin 8.4 perusteella $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Määritetään vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen. On siis ratkaistava yhtälö $x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 = \bar{u}$ eli yhtälö $x_1(2, -1) + x_2(1, 3) = (8, 3)$. Esimerkistä 8.4 nähdään, että yhtälön ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7}(3u_1 - u_2) = \dfrac{1}{7}(24 - 3) = 3 \\ x_2 = \dfrac{1}{7}(v_1 + 2v_2) = \dfrac{1}{7}(8 + 6) = 2. \end{cases}$$

Siis $\bar{u} = 3\bar{w}_1 + 2\bar{w}_2$, eli kysytyt koordinaatit ovat 3 ja 2. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 8.22.



Kuva 8.22: Vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen ovat 3 ja 2.

8.2 Dimensio

Aliavaruudella voi olla useita eri kantoja, mutta jokaisessa niistä on yhtä monta vektoria.

Lause 8.7. *Aliavaruuden W jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_j)$ ja $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ ovat molemmat aliavaruuden W kantoja. Pyritään osoittamaan, että $j = k$. Tehdään se osoittamalla, että muut vaihtoehdot $j < k$ ja $k < j$ johtavat ristiriitaan.

Oletetaan, että $j < k$. Tarkastellaan yhtälöä

$$x_1\bar{w}_1 + \cdots + x_k\bar{w}_k = \bar{0}\,. \tag{6}$$

Koska $\mathcal{B}$ on W:n kanta, voidaan kaikki kannan $\mathcal{C}$ vektorit kirjoittaa kannan $\mathcal{B}$ vektorien lineaarikombinaatioina:

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1j}\bar{v}_j \\
\bar{w}_2 &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2j}\bar{v}_j \\
&\vdots \\
\bar{w}_k &= a_{k1}\bar{v}_1 + a_{k2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{kj}\bar{v}_j
\end{aligned}$$

joillakin $a_{11}, \dots, a_{kj} \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla nämä yhtälöön (6) muodostuu yhtäpitävä yhtälö:

$$\begin{aligned}
&x_1(a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1j}\bar{v}_j) \\
&\qquad + x_2(a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2j}\bar{v}_j) \\
&\qquad\qquad + \dots \\
&\qquad\qquad\quad + x_k(a_{k1}\bar{v}_1 + a_{k2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{kj}\bar{v}_j) = \bar{0},
\end{aligned}$$

josta saadaan edelleen ryhmittelemällä

$$\begin{aligned}
&(x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_ka_{k1})\bar{v}_1 \\
&\qquad + (x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_ka_{k2})\bar{v}_2 \\
&\qquad\qquad + \dots \\
&\qquad\qquad\quad + (x_1a_{1j} + x_2a_{2j} + \cdots + x_ka_{kj})\bar{v}_j = \bar{0}.
\end{aligned}$$

Jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ on kanta, joten se on vapaa. Siten edellinen yhtälö toteutuu, jos ja vain jos kaikki kertoimet ovat nollia:

$$\begin{cases}
x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_ka_{k1} &= 0 \\
x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_ka_{k2} &= 0 \\
\qquad\qquad\vdots & \ \ \vdots \\
x_1a_{1j} + x_2a_{2j} + \cdots + x_ka_{kj} &= 0
\end{cases}$$

Kyseessä on homogeeninen yhtälöryhmä, jossa tuntemattomien määrä k on suurempi kuin yhtälöiden määrä j. Lauseen 7.10 mukaan yhtälöryhmällä on muitakin ratkaisuja kuin $x_1 = 0, \dots, x_k = 0$. Siis jono $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on sidottu. Tämä on ristiriita, sillä $\mathcal{C}$ on aliavaruuden W kanta.

Tapaus $j > k$ käsitellään vastaavasti. Tällöinkin päädytään ristiriitaan. Täytyy siis päteä $j = k$. □

Voidaan osoittaa, että jokaisella avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudella on kanta. (Tämä todistetaan kurssin toisessa osassa.) Lisäksi edellä nähtiin, että jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria. Kantavektorien lukumäärää kutsutaan avaruuden dimensioksi.

Määritelmä 8.8. Aliavaruuden W *dimensio* $\dim(W)$ on aliavaruuden W kannan vektoreiden lukumäärä. Jos aliavaruuden dimensio on n, sanotaan, että aliavaruus on *n-ulotteinen.*

Esimerkki 8.9. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ dimensio on 2, sillä avaruudella on kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Vastaavasti avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio on n, sillä avaruuden luonnollisen kannan vektorien lukumäärä on n.

Esimerkki 8.10. Merkitään $\bar{v}_1 = (3, -1, 5)$, $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ ja $\bar{v}_3 = (0, -5, 1)$. Olkoon $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Määritetään aliavaruuden W dimensio.

Oletetaan, että $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$. Selvitetään, mikä ehto vektorin $\bar{u}$ komponenttien pitää toteuttaa, jotta $\bar{u}$ on aliavaruudessa W. Ratkaistaan yhtälö $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{u}$ eli yhtälö

$$x_1(3, -1, 5) + x_2(2, 1, 3) + x_3(0, -5, 1) = (u_1, u_2, u_3).$$

Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}- 5x_3} = u_1 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = u_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = u_3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 0 & u_1 \\ -1 & 1 & -5 & u_2 \\ 5 & 3 & 1 & u_3 \end{array}\right],$$

ja se saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua matriisiksi

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 5 & -u_2 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{5}(u_1 + 3u_2) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}(5u_3 + u_2 - 8u_1) \end{array}\right].$$

Havaitaan, että yhtälöryhmällä on ratkaisu, jos ja vain jos alinta riviä vastaava yhtälö $0 = \frac{1}{5}(5u_3 + u_2 - 8u_1)$ on tosi eli $5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0$. Siten

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) \\ &= \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0\} \\ &= \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_2 = 8u_1 - 5u_3\} \\ &= \{(u_1, 8u_1 - 5u_3, u_3) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u_1(1, 8, 0) + u_3(0, -5, 1) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\big((1, 8, 0), (0, -5, 1)\big). \end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että vektorit $(1, 8, 0)$ ja $(0, -5, 1)$ virittävät aliavaruuden. Lisäksi voidaan näyttää, että nämä kaksi vektoria ovat lineaarisesti riippumattomia. (Tämän osoittaminen jätetään lukijalle.) Siispä jono $\big((1, 8, 0), (0, -5, 1)\big)$ on avaruuden W kanta, ja $\dim(W) = 2$.

Esimerkki 8.11. Edellisen esimerkin aliavaruudelle W voidaan löytää kanta myös toisella menetelmällä. Oletetaan nyt, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in W$. Tällöin yhtälö

$$x_1(3, -1, 5) + x_2(2, 1, 3) + x_3(0, -5, 1) = (w_1, w_2, w_3) \tag{7}$$

pätee joillakin kertoimilla $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Samalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä yhtälöä vastaa matriisi

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 0 & w_1 \\ -1 & 1 & -5 & w_2 \\ 5 & 3 & 1 & w_3 \end{array}\right].$$

Koska olemme olettaneet, että vektori $\bar{w}$ kuuluu aliavaruuteen W, tiedämme, että yhtälöstä (7) saatavalla yhtälöryhmällä on varmasti ainakin yksi ratkaisu. Tämän vuoksi on samantekevää, mitä porrasmatriisiin tulee pystyviivan oikealle puolelle, ja voimme kiinnittää huomion yhtälön kertoimiin. Nämä näyttävät porrasmatriisissa seuraavilta:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Porrasmatriisista huomataan, että kolmannessa sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota. Muuttujan x_3 arvo voidaan siis valita vapaasti, ja valinta määrää muuttujien x_1 ja x_2 arvot. Siispä yhtälössä (7) voi kerroin x_3 saada minkä tahansa arvon, esimerkiksi arvon 0. Jokainen vektori $\bar{w} \in W$ voidaan täten ilmaista pelkästään vektorien $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaationa. Koska nämä vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat (tarkistus jätetään lukijan tehtäväksi), ne muodostavat aliavaruuden W kannan. Tämä kanta $\big((3, -1, 5), (2, 1, 3)\big)$ on eri kuin edellisessä esimerkissä saatu, mutta siinä on yhtä monta vektoria. Aliavaruuden W dimensio on siis 2.