7 Vapaus

Kuten edellisen luvun lopussa mainittiin, seuraavaksi pyritään ratkaisemaan, onko annetussa aliavaruuden virittäjäjoukossa tarpeettomia vektoreita. Jos tällaisia ei ole, virittäjäjoukkoa kutsutaan vapaaksi.

7.1 Vapauden määritelmä

Määritelmä 7.1. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\ldots$, $c_k = 0$.

Jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa eli lineaarisesti riippumaton, voidaan myös sanoa, että vektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ ovat lineaarisesti riippumattomia toisistaan. Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu*.

Huom. 1. Vektorijonolla $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ tarkoitetaan yksinkertaisesti tiettyjen vektorien muodostamaa kokoelmaa. Sitä ei saa sekoittaa vektorimerkintään. Kyseessä ei siis ole jonkinlainen ”vektorien vektori”.

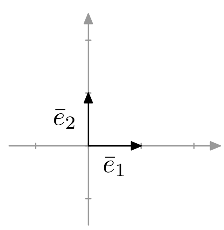
Huom. 2. Määritelmän ehto voidaan ilmaista muodossa ”vektorien lineaarikombinaatio on nolla vain, jos kaikki kertoimet ovat nollia”.

Tullaan näkemään, että jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, voidaan aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkiot kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Virittäjien joukossa ei siis tällöin ole tarpeettomia vektoreita. Katsotaan ensin kuitenkin muutamia esimerkkejä.

Esimerkki 7.2. Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Osoitetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa. Oletetaan, että reaaliluvut c_1 ja c_2 ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 = \bar{0}.$$

Nyt $c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$, joten $(c_1, c_2) = (0, 0)$. Täytyy siis päteä $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$. Näin on osoitettu, että jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa.



Kuva 7.18: Jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa.

Esimerkki 7.3. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2)$ ja $\bar{v}_2 = (-3, -1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa vai sidottu.

Oletetaan, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = \bar{0}$ joillakin c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Nyt

$$c_1(1, 2) + c_2(-3, -1) = (0, 0)$$

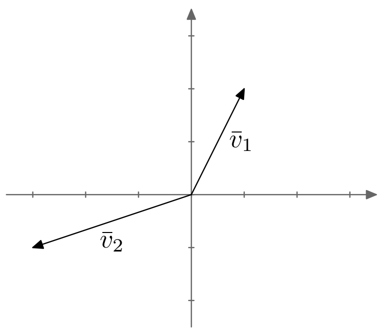
eli

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä c_1 ja c_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ainoa ratkaisu on $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on siis vapaa.



Kuva 7.19: Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on vapaa.

Esimerkki 7.4. Kun osoitetaan jono sidotuksi, ei välttämättä tarvitse ratkaista yhtälöryhmää. Toisinaan on nimittäin helppo nähdä, minkälaisten kertoimien avulla lineaarikombinaatiosta muodostuu nollavektori.

Merkitään $\bar{w}_1 = (2, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (-4, -2)$. Huomataan, että

$$2\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \bar{0}.$$

Koska vektorien $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ lineaarikombinaatio on nollavektori, vaikka kertoimet eivät ole nollia, jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on määritelmän nojalla sidottu.

Esimerkki 7.5. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2)$, $\bar{v}_2 = (-3, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, 1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa vai sidottu. Oletetaan, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ joillakin c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$c_1(1, 2) + c_2(-3, -1) + c_3(-1, 1) = (0, 0)$$

eli

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä c_1 ja c_2:

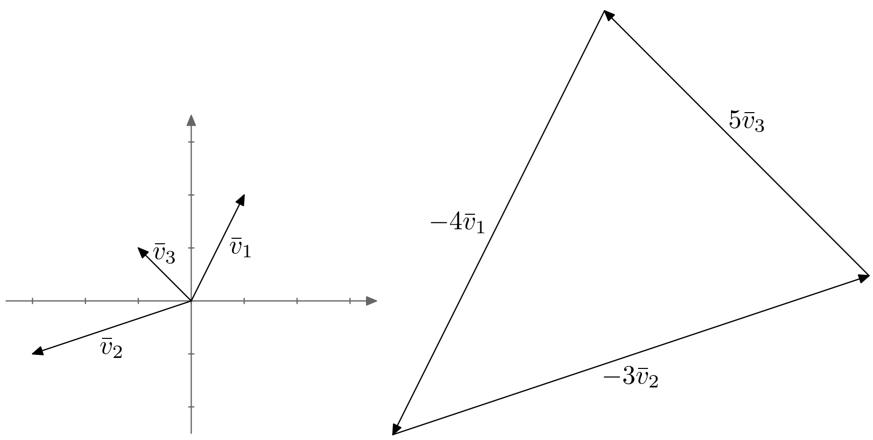
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right].$$

Huomataan, että yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua:

$$\begin{cases} x_1 = -(4/5)t \\ x_2 = -(3/5)t \qquad \text{missä } t \in \mathbb{R}. \\ x_3 = t \end{cases}$$

Näin ollen $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ ei ole ainoa ratkaisu. Voidaan valita esimerkiksi $t = 5$, jolloin $c_1 = -4$ ja $c_2 = -3$ ja $c_3 = 5$. Tällöin $-4\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3 = \bar{0}$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on siis sidottu. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 7.20.



Kuva 7.20: Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu.

Määritelmän mukaan jonon vapaus kertoo siitä, että nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla jonon vektorien lineaarikombinaationa. Selvästikin yhtälö

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

toteutuu ainakin, jos kertoimiksi $c_1, \ldots, c_k$ valitaan nollat. Toisinaan yhtälö kuitenkin toteutuu myös joillakin muilla kertoimilla. Jono on vapaa, jos yhtälö toteutuu *ainoastaan nollakertoimilla*.

Seuraava lause osoittaa, että vektorijono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ kaikki vektorit voidaan ilmaista täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatioina. Siis jos nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa, myös kaikki muut aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ vektorit voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa, ja päinvastoin. Vapaat vektorijonot ovat kiinnostavia nimenomaan sen vuoksi, että niistä saadaan virittäjäjoukko, jossa ei ole turhia vektoreita.

Lause 7.6. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. Muotoa "jos ja vain jos" oleva väite todistetaan kahdessa osassa. Ensin oletetaan väitteen ensimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin jälkimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään usein symbolilla "$\Rightarrow$". Sitten oletetaan jälkimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin ensimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään symbolilla "$\Leftarrow$". Ryhdytään todistamaan väitettä.

"$\Rightarrow$": Oletetaan ensin, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoitetaan, että jokainen aliavaruuden $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Oletetaan, että alkio $w \in W$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \tag{4}$$

ja lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k \tag{5}$$

joillakin $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Nyt $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$, joten

$$a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k - (b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k) = \bar{0}.$$

Vektorien yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun ominaisuuksien perusteella pätee

$$(a_1 - b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k - b_k)\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on oletuksen nojalla vapaa, joten yllä olevasta yhtälöstä seuraa, että kaikki kertoimet ovat nollia: $a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_k - b_k = 0$. Siten $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_k = b_k$. Näin ollen tutkitut lineaarikombinaatiot (4) ja (5) ovatkin itse asiassa samanlaiset (niissä on samat kertoimet). Siksi vektoria $\bar{w}$ ei voida kirjoittaa usealla eri tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että jokainen aliavaruuden $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Osoitetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Sitä varten oletetaan, että luvut $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Tiedetään, että ainakin

$$0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \cdots + 0\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Koska nollavektori $\bar{0}$ on aliavaruuden W alkio, se voidaan oletuksen mukaan kirjoittaa virittäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Siksi täytyy päteä $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$. Siis jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. □

Seuraava lause osoittaa, että vektorijono on sidottu, jos ja vain jos jokin sen vektoreista voidaan ilmaista toisten lineaarikombinaationa.

Lause 7.7. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ja $k \geq 2$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos*

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu. On siis olemassa luvut $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, joilla pätee

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0},$$

ja lisäksi $c_j \neq 0$ jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Nyt

$$c_j\bar{v}_j = -c_1\bar{v}_1 - \cdots - c_{j-1}\bar{v}_{j-1} - c_{j+1}\bar{v}_{j+1} - \cdots - c_k\bar{v}_k$$

ja edelleen

$$\bar{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\bar{v}_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\bar{v}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\bar{v}_{j+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_j}\bar{v}_k.$$

Siis $\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Nyt on olemassa sellaiset $c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, että

$$\bar{v}_j = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Tästä seuraa, että

$$\bar{0} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + (-1)\bar{v}_j + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Koska kerroin -1 ei ole nolla, on jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ sidottu. □

Esimerkki 7.8. Tarkastellaan eräitä avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita $\bar{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_3 = (0, 0, 2)$ ja $\bar{v}_4 = (3, -1, 0)$. Näillä pätee muun muassa

$$2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \bar{v}_4 = \bar{0},$$

joten jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ on sidottu. Edellisen lauseen perusteella jokin vektoreista voidaan kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa. Yllä olevasta yhtälöstä nähdäänkin, että

$$\bar{v}_2 = -2\bar{v}_1 + \bar{v}_4.$$

Kaikkia vektoreita ei kuitenkaan välttämättä voida kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa. Esimerkiksi ei ole olemassa sellaisia lukuja a, b ja c, että pätisi

$$\bar{v}_3 \neq a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_4.$$

(Tämän täsmällinen todistaminen jätetään lukijalle.)

7.2 Homogeeniset yhtälöryhmät ja vapaus

Vektorijonon vapautta tutkittaessa päädytään ratkaisemaan yhtälöryhmiä, joissa vakiot ovat nollia. Tällaista yhtälöryhmää kutsutaan homogeeniseksi.

Määritelmä 7.9. Lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kaikki vakiot ovat nollia, on nimeltään *homogeeninen yhtälöryhmä.*

Homogeeninen yhtälöryhmä on siis muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{cases}$$

missä $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$. Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina ainakin yksi ratkaisu:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots \quad x_n = 0.$$

Tätä kutsutaan yhtälöryhmän triviaaliksi ratkaisuksi.

Lause 7.10. *Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on suurempi kuin yhtälöiden määrä m, yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.*

Todistus. Ensinnäkin yhtälöryhmällä on välttämättä ainakin triviaali ratkaisu. Siten ratkaisuja on joko yksi tai äärettömän monta.

Oletuksen mukaan yhtälöryhmän matriisissa on enemmän sarakkeita kuin rivejä. Johtavia alkioita enintään yksi joka rivillä. Koska sarakkeita on enemmän kuin rivejä, on matriisissa ainakin yksi sarake, jossa ei ole johtavaa alkiota. Siten vapaita muuttujia on ainakin yksi, ja yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. □

Korollaari 7.11. *Oletetaan, että* $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$, *missä* $n \in \{1, 2, \ldots\}$. *Jos* $m > n$, *niin jono* $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ *on sidottu.*

Huom. Korollaari on lause joka seuraa suoraan tai lähes suoraan toisesta lauseesta. Tämä korollaari on lauseen 7.10 seuraus.

Todistus. Merkitään $\bar{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{nk})$ kaikilla $k \in \{1, \ldots, m\}$. Nyt yhtälöä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_m\bar{v}_m = \bar{0}$ vastaavaksi yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1m}x_m &= 0 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \cdots + v_{2m}x_m &= 0 \\ \qquad\qquad\vdots & \ \ \vdots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{nm}x_m &= 0. \end{cases}$$

Tässä homogeenisessa yhtälöryhmässä on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä. Siten yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. Koska löytyy muitakin ratkaisuja kuin triviaaliratkaisu, ei jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ ole vapaa. $\square$

Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on pienempi tai yhtä suuri kuin yhtälöiden määrä m, ei ratkaisujen määrästä voi äkkiseltään sanoa mitään varmaa. Ratkaisuja voi olla täsmälleen yksi (triviaali ratkaisu) tai äärettömän monta. Jos siis avaruuden $\mathbb{R}^n$ jonon $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ pituus m on *pienempi* kuin n, ei jonon lineaarisesta riippumattomuudesta voida sanoa sen perusteella mitään.