6 Virittäminen

Edellisessä luvussa opittiin vastaaamaan erilaisiin lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuja koskeviin kysymyksiin. Hyödynnetään näitä tietoja nyt avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuksien tutkimiseen. Palautetaan mieleen, että vektoreiden $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä aliavaruus on joukko

$$\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt osaamme vastata esimerkissä 4.5 esitettyyn kysymykseen. Esimerkissä haluttiin tietää, kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Tällöin päädyttiin yhtälöryhmään

$$\begin{cases} & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & & & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & -1. \end{cases}$$

Kysymys siitä, kuuluuko $\bar{w}$ aliavaruuteen $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$, on muutettu kysymykseksi, onko kyseisellä yhtälöryhmällä ratkaisuja. Kun yhtälöryhmää käsitellään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä, nähdään, että ratkaisuja ei ole. Siten $\bar{w} \notin \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Kutakin virittäjävektorien joukkoa vastaa niiden virittämä aliavaruus. Toisinaan on annettu aliavaruus, ja halutaan tietää, virittävätkö jotkin tietyt vektorit sen. Erityisesti voidaan kysyä, virittävätkö jotkin annetut vektorit koko vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$. Tutkitaan näitä kysymyksiä seuraavissa esimerkeissä.

Esimerkki 6.1. Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Osoitetaan, että vektorit $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ virittävät koko avaruuden $\mathbb{R}^2$ eli että

$$\text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2.$$

Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko. Tiedetään, että jokainen joukon $\text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ vektori on avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori, joten on selvää, että $\text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$. Näin ollen riittää näyttää, että $\mathbb{R}^2 \subset \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. On siis osoitettava, että jokainen avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori voidaan esittää vektoreiden $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ lineaarikombinaationa.

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$\bar{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2.$$

Koska $\bar{v}$ voidaan kirjoittaa yllä olevassa muodossa, nähdään, että $\bar{v} \in \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Siispä $\mathbb{R}^2 \subset \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, joten on osoitettu, että $\text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2$.

Esimerkki 6.2. Tutkitaan, millä ehdolla vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kuuluu vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (3, 2, -1), \quad \bar{v}_2 = (2, -2, 6) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (3, 4, -5)$$

virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Jotta vektori $\bar{w}$ olisi vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio, täytyy olla olemassa luvut x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}.$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = w_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = w_2 \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_3 = w_3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisista saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 5 & -w_3 \\ 0 & 10 & -6 & w_2 + 2w_3 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 - 2w_2 - w_3 \end{array}\right]$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, jos ja vain jos alinta riviä vastaava yhtälö $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = w_1 - 2w_2 - w_3$ on tosi eli $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$. Siten vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ on aliavaruudessa $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$, jos ja vain jos $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$.

Nyt aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ voidaan kirjoittaa uudessa muodossa:

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 - 2w_2 - w_3 = 0\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_3 = w_1 - 2w_2\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_1 - 2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(w_1, 0, w_1) + (0, w_2, -2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{w_1(1, 0, 1) + w_2(0, 1, -2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Kyseessä on siis vektorien $(1, 0, 1)$ ja $(0, 1, -2)$ virittämä aliavaruus. Toisin sanottuna

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \operatorname{span}\big((1, 0, 1), (0, 1, -2)\big).$$

Eri vektorit voivat siis virittää saman aliavaruuden. Edes virittäjävektorien määrän ei tarvitse olla sama.

Esimerkki 6.3. Tutkitaan, virittävätkö vektorit

$$\bar{u}_1 = (1, 1, 0), \quad \bar{u}_2 = (1, 0, 1), \quad \bar{u}_3 = (0, 1, 1) \quad \text{ja} \quad \bar{u}_4 = (-2, 1, 1)$$

avaruuden $\mathbb{R}^3$. Oletetaan, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. On selvitettävä, onko olemassa lukuja $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 + x_4\bar{u}_4 = \bar{w}.$$

Saadaan yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right].$$

Tästä saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{ccrr|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & w_1 - w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(w_3 + w_2 - w_1) \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, olivatpa w_1, w_2 ja w_3 mitä lukuja tahansa. Siten $\bar{w} \in \text{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$. Näin ollen $\mathbb{R}^3 = \text{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$.

Edellisen esimerkin virittäjät $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ eivät ole parhaat mahdolliset. Koska yhtälöryhmässä on vapaita muuttujia, on yhtälöryhmällä äärettömän monta ratkaisua. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ alkiot voidaan siis kirjoittaa *usealla* eri tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Esimerkiksi jos $\bar{w} = (1, 2, 3)$, niin ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 2 - 2t \\ x_4 = t \end{cases} \qquad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Valitsemalla $t = 3$ saadaan

$$(1, 2, 3) = 3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 - 4\bar{u}_3 + 3\bar{u}_4$$

ja toisaalta valitsemalla $t = 1$ saadaan

$$(1, 2, 3) = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 0\bar{u}_3 + \bar{u}_4.$$

Tämä ei ole toivottavaa, vaan tavoitteena on löytää sellainen virittäjäjoukko, että aliavaruuden vektorit voidaan ilmaista virittäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Tällaisia virittäjäjoukkoja tutkitaan seuraavassa luvussa.