5 Lineaariset yhtälöryhmät

Edellisen luvun lopun esimerkissä päädyttiin yhtälöryhmään, jonka ratkaisemisesta riippui, kuuluuko tietty vektori eräiden toisten vektorien virittämään aliavaruuteen. Tämäntyyppisiä tilanteita esiintyy lineaarialgebrassa jatkuvasti, ja kysymykset voivat olla hyvin monimuotoisia. Esimerkiksi mainitussa esimerkissä ei itse asiassa tarvittu yhtälöryhmän varsinaista ratkaisua, vaan oli ainoastaan osoitettava sen *olemassaolo*. Toisissa kysymyksissä olennaista saattaa olla, onko mahdollisia ratkaisuja yksi vai useampia. Joidenkin yhtälöryhmien kohdalla haluamme selvittää, minkälaisen aliavaruuden ratkaisut muodostavat.

Esimerkki 5.1. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -x + 2y \qquad = -1 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Kysymyksessä on niin sanottu lineaarinen yhtälöryhmä, koska yhtälöt ovat kaikki ensimmäisen asteen yhtälöitä. Yritetään ratkaista yhtälöryhmä eli löytää sellaiset luvut x, y ja z, että kaikki ryhmän yhtälöt toteutuvat yhtä aikaa.

Aloitetaan ratkaisemalla toisesta yhtälöstä x:

$$-x + 2y = -1 \iff x = 2y + 1.$$

Sijoitetaan sitten saatu x ensimmäiseen yhtälöön, ja ratkaistaan z:

$$3(2y + 1) + 2y + z = 1 \iff 6y + 3 + 2y + z = 1 \iff z = -8y - 2.$$

Sijoitetaan sitten sekä x että z kolmanteen yhtälöön, jotta voitaisiin ratkaista y:

$$2(2y + 1) + 4y - 8y - 2 = 0 \iff 4y + 2 + 4y - 8y - 2 = 0 \iff 0 = 0.$$

Päädyttiin tulokseen $0 = 0$. Miten tämä pitäisi tulkita? Onko ratkaisuja yksi vai useampia? Päteekö yhtälö ehkä kaikilla luvuilla? Selvästihän x ja z kuitenkin riippuvat y:stä, koska ne ratkaistiin yllä y:n lausekkeina. Mutta samalla tavoinhan y:n voitaisiin ajatella riippuvan x:stä ja z:sta. Vai olisiko sijoitus pitänyt tehdä jossain toisessa järjestyksessä?

Esimerkki osoittaa, että yhtälöryhmien monimutkaistuessa tarvitaan jokin järjestelmällinen menetelmä, jota käyttämällä sekä saadaan aina varmasti jokin vastaus että pystytään tulkitsemaan vastauksen merkitys. Tässä luvussa esiteltävä Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä redusoi minkä tahansa lineaarisen yhtälöryhmän sellaiseen muotoon, että kaikkiin (ainakin tällä kurssilla tarvittaviin) kysymyksiin voidaan helposti antaa vastaus.

5.1 Lineaarisen yhtälöryhmän määritelmä

Lineaarinen yhtälöryhmä on yhtälöryhmä, joka on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

missä $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Symbolit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat yhtälöiden *tuntemattomia.* Lukuja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi* ja lukuja $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *vakioiksi.* Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä symboleilla x, y, z ja niin edelleen.

Esimerkiksi

$$\begin{cases} -4x_1 & + & \sqrt{3}x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & + & \frac{6}{8}x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & \sqrt{2}x_2 & + & 11x_3 & = & -3 \\ & & -6x_2 & - & 32x_3 & = & 4 \end{cases}$$

on lineaarinen yhtälöryhmä.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään kaikki ne luvut, jotka tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ paikalle sijoitettuina toteuttavat yhtä aikaa kaikki yhtälöt.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisen kannalta oleellista ovat vain kertoimien ja vakioiden arvot, esimerkiksi tuntemattomien nimityksellä ei ole merkitystä. Kaikki tieto yhtälöryhmästä voidaankin tiivistää lukutaulukkoon eli *matriisiin,* jossa luetellaan kaikki kertoimet sekä vakiot. Kun käsitellään yhtälöryhmien sijasta matriiseja, on kirjoitettavaa paljon vähemmän, sillä tuntemattomia ei tarvitse kirjata ylös.

Esimerkiksi edellä esitellyn yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & \sqrt{3} & 2 & 4 \\ 1 & 0 & \frac{6}{8} & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 11 & -3 \\ 0 & -6 & -32 & 4 \end{array}\right].$$

Selkeyden vuoksi kertoimet on tapana erottaa vakioista pystyviivalla. Viivalla ei kuitenkaan ole matemaattista merkitystä. Huomaa, että matriisiin on kirjoitettava nolla niiden termien kohdalle, jotka puuttuvat yhtälöryhmästä. Kyseisten termien kertoimena on nimittäin nolla.

Kappaleessa 8 tutustutaan matriisien teoriaan yleisemmin. Tässä luvussa käsittelemme vain yhtälöryhmistä saatuja matriiseja.

5.2 Alkeisrivitoimitukset ja porrasmatriisit

Seuraavaksi käydään läpi menetelmä, jolla voidaan ratkaista mikä tahansa lineaarinen yhtälöryhmä. Ideana on muokata yhtälöryhmästä uusia yhtälöryhmiä, joilla on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä. Viimeisenä saatu yhtälöryhmä on sellaisessa muodossa, josta sen ratkaisuja koskeviin kysymyksiin on helppo vastata. Koska viimeisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat samat kuin alkuperäisen yhtälöryhmän, myös alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisut ja niiden luonne tunnetaan.

Määritelmä 5.2. Yhtälöryhmiä kutsutaan *ekvivalenteiksi*, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut.

Ryhdymme muokkaamaan yhtälöryhmiä niin kutsutuilla alkeisrivitoimituksilla. Niiden avulla tuotetaan uusia yhtälöryhmiä, jotka ovat ekvivalentteja alkuperäisen yhtälöryhmän kanssa. Koska matriisien käsitteleminen on helpompaa kuin yhtälöryhmien, tehdään alkeisrivitoimitukset suoraan matriiseille.

Määritelmä 5.3. Seuraavat kolme operaatiota ovat *alkeisrivitoimituksia*:

1) Vaihdetaan kahden rivin paikka matriisissa.
2) Kerrotaan jokin rivi nollasta poikkeavalla reaaliluvulla.
3) Lisätään johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla kerrottuna.

Alkeisrivitoimituksille käytetään tässä materiaalissa seuraavia lyhennysmerkintöjä

- $R_i \leftrightarrow R_j$: vaihdetaan rivien i ja j paikat $(i \neq j)$.
- aR_i: kerrotaan rivi i luvulla $a \neq 0$.
- $R_i + bR_j$: lisätään riviin i rivi j luvulla b kerrottuna $(i \neq j)$.

Esimerkki 5.4. Seuraavassa on annettu esimerkit erilaisista alkeisrivitoimituksista:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

Määritelmä 5.5. Matriisi A on *riviekvivalentti* matriisin B kanssa, jos B saadaan matriisista A alkeisrivitoimituksilla.

Esimerkiksi edellisen esimerkin matriisit

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \quad \text{ja} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

ovat riviekvivalentit. Alkeisrivitoimituksia voidaan ajatella tehtävän myös nolla kappaletta. Siten jokainen matriisi on itsensä kanssa riviekvivalentti.

Lause 5.6. *Jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit.*

Lause voidaan muotoilla myös toisin: jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmillä on täsmälleen samat ratkaisut. Alkeisrivitoimituksen tekeminen ei siis muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. Lauseen todistus on esitetty luvun lopussa.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \rightsquigarrow \underset{\text{toimituksia}}{\overset{\text{alkeisrivi-}}{\cdots}} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\quad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{c}\text{samat}\\ \text{ratkaisut}\end{array} \longrightarrow \begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\quad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

Kuva 5.16: Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän perusta.

Yhtälöryhmää ratkaistaessa on tavoitteena muuttaa yhtälöryhmän matriisi alkeisrivitoimituksilla niin kutsutuksi redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut on helppo lukea. Määritellään ensin porrasmatriisi.

Määritelmä 5.7. Matriisi on *porrasmatriisi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1) mahdolliset nollarivit ovat alimpina
2) kullakin rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio, ns. *johtava alkio*, on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat porrasmatriiseja. Niiden johtavat alkiot on lihavoitu.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{14} & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & -41 & 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Porrasmuoto auttaa jo yhtälöryhmän ratkaisemisessa, mutta se ei ole tietyssä mielessä yksikäsitteinen. Tarkemmin sanoen kutakin matriisia vastaa useampi kuin yksi sen kanssa riviekvivalentti porrasmatriisi. Kun alkeisrivitoimituksia käytetään lisää, päädytään lopulta alkuperäistä matriisia vastaavaan redusoituun muotoon, joka on kullekin matriisille yksikäsitteinen.

Määritelmä 5.8. Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1) matriisi on porrasmatriisi
2) jokaisen rivin johtava alkio on 1
3) jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat redusoituja porrasmatriiseja. Johtavat ykköset on jälleen lihavoitu.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & -53 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esimerkki 5.9. Matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

on redusoitu porrasmatriisi. Sitä vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 & = & 4 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Huomataan, että matriisista näkyy suoraan yhtälöryhmän ratkaisu.

5.3 Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä

Tavoitteena on muuttaa yhtälöryhmän matriisi alkeisrivitoimitusten avulla redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut näkyvät suoraan. Voidaan osoittaa, että mikä tahansa matriisi voidaan muuttaa tällä tavoin redusoiduksi porrasmatriisiksi ja että alkeisrivitoimitusten käyttämisjärjestys ei vaikuta tulokseen. Seuraava esimerkki näyttää, kuinka tämä tehdään.

Esimerkki 5.10. Muutetaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

redusoiduksi porrasmatriisiksi. Aloitetaan ensimmäisestä sarakkeesta. Vaihtamalla ensimmäisen ja toisen rivin paikat, saadaan ensimmäisen rivin johtavaksi alkioksi 1:

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen johtavan alkion alla olevat alkiot on helppo muuttaa nolliksi. Vähennetään ensin toisesta rivistä ensimmäinen rivi luvulla 2 kerrottuna:

$$\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten kolmanteen riviin ensimmäinen rivi luvulla 1 kerrottuna:

$$\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Nyt ensimmäinen sarake on halutussa muodossa. Siirrytään muokkaamaan toista saraketta. Muutetaan ensin sen johtava alkio ykköseksi, jotta voidaan toimia samoin kuin edellä. Kerrotaan siis toinen rivi luvulla -1. Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{-1\cdot R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Toisen rivin johtavan alkion avulla voidaan muuttaa sen alla oleva alkio nollaksi. Lisätään kolmanteen riviin toinen rivi luvulla 2 kerrottuna. Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{R_3+2R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{bmatrix},$$

joka on porrasmatriisi.

Jatketaan muokkaamista niin, että saadaan aikaan redusoitu porrasmatriisi. Muutetaan ensin viimeinenkin johtava alkio ykköseksi:

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Muutetaan alimman rivin johtavan alkion avulla kaikki kolmannen sarakkeen muut alkiot nolliksi:

$$\xrightarrow{R_2-R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-2R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Näin saatu matriisi on redusoitu porrasmatriisi.

Saatu redusoitu porrasmatriisi on eri matriisi kuin se, josta lähdettiin liikkeelle. Matriisit myös vastaavat erilaisia yhtälöryhmiä. Näillä yhtälöryhmillä on kuitenkin samat ratkaisut lauseen 5.6 nojalla.

Yhtälöryhmän ratkaiseminen Gaussin–Jordanin menetelmää käyttäen sisältää seuraavat vaiheet:

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.
3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

Esimerkki 5.11. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Tämä matriisi muutettiin redusoiduksi porrasmatriisiksi esimerkissä 5.10:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Redusoitua porrasmatriisia vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Koska alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat lauseen 5.6 nojalla samat kuin lopuksi saadun yhtälöryhmän, on yhtälöryhmä ratkaistu. Sen ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Esimerkki 5.12. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + z & = & 8 \\ -3x - 6y - 3z & = & -21 \end{cases}$$

Muutetaan yhtälöryhmän matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ -3 & -6 & -3 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+3R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ \qquad\quad\; 0 = 3. \end{cases}$$

Alin yhtälö on aina epätosi, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

Esimerkki 5.13. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 15x_3 &= 9 \\ \quad x_1 \qquad\quad - 2x_3 &= 1 \\ \quad 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

Muutetaan yhtälöryhmän matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 3 & -15 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1 \cdot R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + 3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Saatua matriisia vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ \;\; x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

Alin yhtälö $0 = 0$ on aina tosi. Se ei siis anna ratkaisujen kannalta mitään informaatiota. Tuntemattomalle x_3 ei puolestaan aseteta mitään rajoitteita, joten se voi olla mikä tahansa reaaliluku. Sanotaan, että x_3 on *vapaa muuttuja.* Merkitään $x_3 = t$, missä $t \in \mathbb{R}$.

Ratkaistaan vielä muut tuntemattomat. Ensimmäinen yhtälö on $x_1 - 2t = 1$, joten $x_1 = 1 + 2t$. Toinen yhtälö puolestaan on $x_2 - 3t = 2$ eli $x_2 = 2 + 3t$. Siten yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2 + 3t \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisuja on siis äärettömän monta. Esimerkiksi $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ ja $x_3 = 1$ sekä $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ja $x_3 = -1$ ovat yhtälöryhmän ratkaisuja. Jokaisella reaaliluvulla t yhtälöryhmälle saadaan eri ratkaisu.

Yhtälöryhmässä saattaa olla useitakin vapaita muuttujia. Nämä löytyvät redusoidussa porrasmatriisissa niistä sarakkeista, joissa ei ole lainkaan johtavaa alkiota.

Esimerkki 5.14. Lineaarisen yhtälöryhmän matriisi muutettiin alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Mikä on yhtälöryhmän ratkaisu?

Havaitaan, että johtavat alkiot ovat sarakkeissa 1, 3 ja 6. Muita sarakkeita vastaavat tuntemattomat x_2, x_4 ja x_5 ovat vapaita muuttujia. Merkitään $x_2 = r$, $x_4 = s$ ja $x_5 = t$, missä r, s, $t \in \mathbb{R}$.

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} x_1 + 3r + 4s = 7 \\ \phantom{x_1 + 3r +{}} x_3 + 2s = 0 \\ \phantom{x_1 + 3r + 4s ={}} x_6 = 3 \end{cases}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_3 = -2s \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s \\ x_4 = s \\ x_5 = t \\ x_6 = 3 \end{cases} \qquad \text{missä } r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Luvut r, s ja t voidaan valita täysin vapaasti, ja jokainen valinta tuottaa yhtälöryhmän ratkaisun.

Redusoidun porrasmatriisin tulkinta

Edelliset esimerkit kuvaavat tilanteita, joihin Gaussin–Jordanin menetelmää käyttäen voidaan päätyä. Kootaan vielä yhteen redusoidun porrasmatriisin M merkitys sitä vastaavan yhtälöryhmän kannalta eri tapauksissa.

- Jos jokin matriisin M viimeisistä riveistä on muotoa $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$ (eli rivin johtava ykkönen on pystyviivan oikealla puolella), kyseistä riviä vastaa epätosi yhtälö $0 = 1$. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.
- Oletetaan, että edellinen tapaus ei toteudu. Jos joltakin matriisin M sarakkeelta puuttuu johtava alkio (pystyviivan vasemmalta puolelta), tuota saraketta vastaava muuttuja on vapaa. Yhtälöryhmän ratkaisut voidaan esittää vapaiden muuttujien avulla. Kunkin vapaan muuttujan arvo voidaan valita vapaasti, joten yhtälöryhmällä on ratkaisuja ääretön määrä.
- Oletetaan, että edelliset tapaukset eivät toteudu. Tällöin matriisin M jokaisessa sarakkeessa oikeanpuoleisinta lukuunottamatta on johtava alkio, ja yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitteinen.

Esimerkki 5.15. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = -2\,. \end{cases}$$

Tutkitaan, miten luvun k arvot vaikuttavat ratkaisujen lukumäärään. Ryhdytään muuttamaan yhtälöryhmän matriisia redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - kR_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -2-k \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array}\right]$$

Kaikki alkeisrivitoimitukset voidaan tähän asti tehdä riippumatta siitä, mikä luku k on. Jatkaminen ei kuitenkaan onnistu, sillä toisen rivin alkio $k-1$ saattaa olla nolla, samoin kolmannen rivin alkio $2-k-k^2$. Tarkastellaan näitä tapauksia erikseen.

Oletetaan ensin, että kolmannen rivin alkio $2-k-k^2 = 0$ eli $k = -2$ tai $k = 1$.

- Jos $k = -2$, viimeinen matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö $0 = 0$ on aina tosi. Lisäksi tuntematonta x_3 vastaavassa sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota, joten x_3 on vapaa muuttuja. Ratkaisuja on siten äärettömän monta.

- Jos $k = 1$, viimeinen matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

  Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö $0 = -3$ on aina epätosi. Siten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

Oletetaan sitten, että toisen rivin alkio $k - 1 = 0$ eli $k = 1$. Tämä tapaus käsiteltiin sattumalta jo edellä.

Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta, jossa sekä toisen rivin alkio $k - 1$ että kolmannen rivin alkio $2 - k - k^2$ ovat nollasta poikkeavia. Tällöin voidaan jatkaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Koska $k - 1 \neq 0$ ja $2 - k - k^2 \neq 0$ saadaan

$$\xrightarrow{\frac{1}{k-1}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2-k-k^2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2-k}{2-k-k^2} \end{array}\right].$$

Tällöin yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Päädyttiin siis seuraavaan tulokseen: Yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, jos ja vain jos $k = -2$. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, jos ja vain jos $k = 1$. Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, jos ja vain jos $k \neq 1$ ja $k \neq -2$.

Geometrinen tulkinta

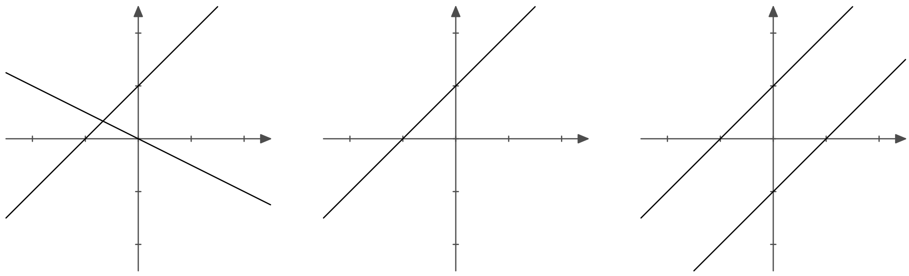
Yhtälöryhmällä voi siis olla täsmälleen yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua. Kun muuttujia on kaksi tai kolme, tilannetta voi havainnollistaa analyyttisen geometrian avulla. Tutkitaan yhtälöparia

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Oletetaan, että yhtälöllä on ratkaisu $x = r$, $y = s$. Sitä voidaan ajatella tason pisteenä (r, s). Koska ratkaisu toteuttaa ensimmäisen yhtälön, piste (r, s) on suoralla, jonka yhtälö on $ax + by = c$. Samoin piste (r, s) on suoralla, jonka yhtälö on $dx + ey = f$. Piste (r, s) on siis molemmilla suorilla, eli se on suorien leikkauspiste.

Jos yhtälöt määrittävät kaksi erisuuntaista suoraa, on niillä on täsmälleen yksi leikkauspiste. Tällöin yhtälöparilla on täsmälleen yksi ratkaisu. Jos yhtälöt määrittävät saman suoran, on leikkauspisteitä äärettömän monta. Silloin ratkaisujakin on äärettömän monta. Jos yhtälöiden määrittämät suorat eivät ole samat mutta ovat kuitenkin yhdensuuntaiset, ei leikkauspisteitä ole. Silloin ei myöskään yhtälöparilla ole ratkaisuja.

Kun muuttujia on kolme, yhtälöt kuvaavat tasoja. Esimerkiksi kolmen tason leikkausjoukko voi olla piste, suora tai taso. Nämä vastaavat tilanteista, joissa ratkaisuun tulee nolla, yksi tai kaksi vapaata muuttujaa. Leikkausjoukko voi olla myös tyhjä, jolloin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.



Kuva 5.17: Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua.

Huomioita porrasmatriiseista

Redusoidut porrasmatriisit ovat teoreettisesti mielenkiintoisia, koska jokaista matriisia vastaa täsmälleen yksi redusoitu porrasmatriisi. Yhtälöryhmää ratkaistaessa voitaisiin kuitenkin pysähtyä jo porrasmatriisivaiheeseen, sillä kaikki tulkinnat voidaan tehdä myös siitä.

Esimerkin 5.13 yhtälöryhmää vastaava porrasmatriisi oli

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Koska kolmannessa sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota, sitä vastaava muuttuja on vapaa. Tähän havaintoon ei tarvita redusoitua porrasmuotoa. Jos merkitään $x_3 = t$, muut muuttujat voidaan ratkaista t:n avulla. Toisen rivin perusteella

$$x_2 - 3t = 2 \iff x_2 = 2 + 3t,$$

ja tämän jälkeen ensimmäisen rivin perusteella

$$x_1 + x_2 - 5t = 3 \iff x_1 + (3t + 2) - 5t = 3 \iff x_1 = 1 + 2t.$$

Porrasmatriisi siis riittää yhtälöryhmän ratkaisemiseen.

Historiallinen huomautus. Gauss ei itse kehittänyt nimeään kantavaa menetelmää, vaan sen tunsi jo ainakin Newton sata vuotta aikaisemmin 1600-luvun loppupuolella. Kiinalaiset puolestaan tunsivat menetelmän jo toisella vuosisadalla eKr. Nimitys ”Gaussin eliminointimenetelmä” tuli käyttöön kuitenkin vasta 1950-luvulla. Tällä nimityksellä tarkoitetaan yleensä nimenomaan porrasmatriisiin tähtäävää menetelmää, ja mikäli halutaan jatkaa redusoituun porrasmatriisiin asti, menetelmää kutsutaan ”Gaussin–Jordanin eliminoinniksi”. Jordan esitti tämän version eliminointimenetelmästä vuonna 1887.

5.4 Yhtälöryhmien ekvivalenssin todistus

Käydään vielä lopuksi todistus sille, että yhtälöryhmillä on samat ratkaisut, jos niiden matriisit ovat riviekvivalentit (lause 5.6).

Lauseen 5.6 todistus. Osoitetaan, että jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit. Tätä varten riittää näyttää, että alkeisrivitoimituksen tekeminen ei vaikuta yhtälöryhmän ratkaisuihin. Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \tag{2}$$

missä $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$.

1. Ensinnäkin huomataan, että yhtälöryhmän rivien järjestyksellä ei ole väliä. Siten kahden rivin paikkojen vaihtaminen ei muuta yhtälöryhmän ratkaisuja.

2. Tutkitaan sitten alkeisrivitoimitusta, joka kertoo rivin i luvulla $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tuloksena on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ ca_{i1}x_1 & + & ca_{i2}x_2 & + & \cdots & + & ca_{in}x_n & = & cb_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{3}$$

On osoitettava, yhtälöryhmillä (2) ja (3) on samat ratkaisut. Tämä tehdään kahdessa osassa. Ensin näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (2) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (3) ratkaisu. Sitten näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (3) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu.

Oletetaan ensin, että $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$ on yhtälöryhmän (2) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (3) ratkaisu. Oletuksen perusteella pätee

$$\begin{cases} a_{11}r_1 & + & a_{12}r_2 & + & \cdots & + & a_{1n}r_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{i1}r_1 & + & a_{i2}r_2 & + & \cdots & + & a_{in}r_n & = & b_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}r_1 & + & a_{m2}r_2 & + & \cdots & + & a_{mn}r_n & = & b_m. \end{cases}$$

Kun i:nnen yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla c, saadaan yhtälö

$$ca_{i1}r_1 + \cdots + ca_{in}r_n = cb_i.$$

Nyt siis $x_1 = r_1, \ldots x_n = r_n$ toteuttaa yhtälöryhmän (3), ja siten se on myös yhtälöryhmän (3) ratkaisu.

Oletetaan sitten, että $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$ on yhtälöryhmän (3) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (2) ratkaisu. Nyt siis

$$\begin{cases} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \cdots & + & a_{1n}s_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ ca_{i1}s_1 & + & ca_{i2}s_2 & + & \cdots & + & ca_{in}s_n & = & cb_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}s_1 & + & a_{m2}s_2 & + & \cdots & + & a_{mn}s_n & = & b_m. \end{cases}$$

Koska $c \neq 0$, voidaan i:nnen yhtälön molemmat puolet jakaa luvulla c. Tällöin saadaan yhtälö $a_{i1}s_1 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$. Nyt nähdään, että $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$ toteuttaa myös yhtälöryhmän (2), joten se on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu. Siten yhtälöryhmillä on samat ratkaisut.

3. Kolmannen alkeisrivitoimituksen tarkastelu jätetään lukijalle.

$\square$