4 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudet

Edellisessä luvussa käsittelimme avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ suoria ja tasoja. Osoittautuu, että erityisesti origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat lineaarialgebran kannalta mielenkiintoisia. Tässä luvussa yleistämme tällaiset suorat ja tasot avaruuteen $\mathbb{R}^n$ ja tutkimme niin kutsuttuja aliavaruuksia.

Määritelmä 4.1. Vektoreiden $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä *aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Vektoreiden virittämä aliavaruus koostuu siis kaikista vektoreiden lineaarikombinaatioista. Englannin kielen verbi ”span” tarkoittaa virittämistä tai ulottamista.

Esimerkki 4.2. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ suora

$$S = \{\bar{0} + t(-3,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-3,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

on vektorin $(-3,1)$ virittämä aliavaruus, eli $S = \operatorname{span}\big((-3,1)\big)$. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso

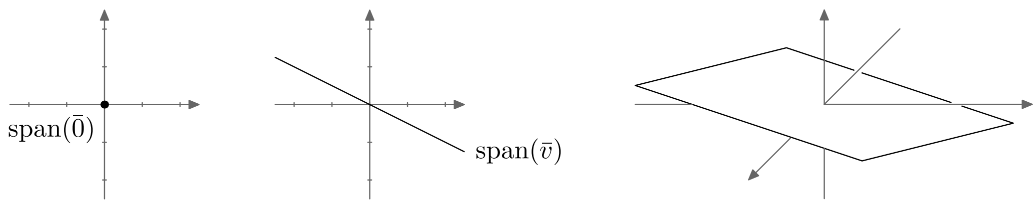
$$T = \{\bar{0} + t(-3,1,2) + s(2,2,0) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(-3,1,2) + s(2,2,0) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

taas on vektorien $(-3,1,2)$ ja $(2,2,0)$ virittämä aliavaruus, joten voidaan merkitä $T = \operatorname{span}\big((-3,1,2),(2,2,0)\big)$.

Tutkitaan hieman, millaisia aliavaruuksia voidaan virittää avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$. Nollavektorin virittämä aliavaruus on $\operatorname{span}(\bar{0}) = \{a \cdot \bar{0} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\bar{0}\}$. Aliavaruudessa on siis ainoastaan nollavektori.

Oletetaan sitten, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ tai $\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}) = \{a\bar{v} \mid a \in \mathbb{R}\}$ on vektorin $\bar{v}$ suuntainen suora. Tämän suoran paikkavektori on nollavektori, joten suora kulkee origon kautta.

Jos taas $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaisia, vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}, \bar{w}) = \{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ on taso, joka kulkee origon kautta.



Kuva 4.14: Nollavektorin virittämä aliavaruus on $\{\bar{0}\}$. Vektorin $\bar{v} \neq \bar{0}$ virittämä aliavaruus on origon kautta kulkeva suora. Kahden vektorin virittämä aliavaruus voi olla origon kautta kulkeva taso.

Aliavaruus yleistää siis origon kautta kulkevan suoran ja tason käsitteitä. Seuraava esimerkki osoittaa, miksi juuri origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat erityisen kiinnostavia.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan origon kautta kulkevaa suoraa

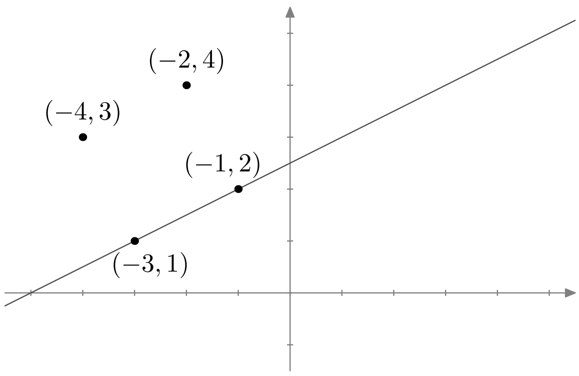
$$S = \operatorname{span}(\bar{v}) = \{t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$. Jos $\bar{w}$, $\bar{u} \in S$, niin $\bar{w} = a\bar{v}$ ja $\bar{u} = b\bar{v}$ joillakin a, $b \in \mathbb{R}$. Nyt $\bar{w} + \bar{u} = (a + b)\bar{v}$, joten summa $\bar{w} + \bar{u}$ on suoran S alkio. Lisäksi jos $c \in \mathbb{R}$, niin $c\bar{w} = c(a\bar{v}) = (ca)\bar{v}$. Siten kaikkien suoran S alkioiden skalaarimonikerrat ovat edelleen suoran S alkioita. Tavallaan suora S on oma pieni avaruutensa avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisässä, ja siellä voidaan laskea vektoreita yhteen ja kertoa niitä reaaliluvuilla. Sama pätee origon kautta kulkeviin tasoihin.

Tilanne on aivan toinen, jos suora tai taso ei kulje origon kautta. Tutkitaan vaikkapa esimerkin 3.2 suoraa

$$S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt esimerkiksi $(-1, 2)$ ja $(-3, 1)$ ovat suoralla S. Summa $(-1, 2) + (-3, 1) = (-4, 3)$ ei kuitenkaan ole suoralla S (ks. kuva 4.15). Myöskään skalaarimonikerta $2 \cdot (-1, 2) = (-2, 4)$ ei ole suoralla S.



Kuva 4.15: Esimerkin 3.2 suora S, joka ei ole aliavaruus.

Edellä tehdyt havainnot voidaan yleistää minkä tahansa vektoreiden virittämälle aliavaruudelle. Jos aliavaruuden kaksi vektoria lasketaan yhteen, on summa edelleen aliavaruudessa. Samoin aliavaruuden vektoreiden skalaarimonikerrat ovat aliavaruudessa. Lisäksi nollavektori kuuluu aina aliavaruuteen.

Lause 4.4. *Oletetaan, että* $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. *Olkoon* $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$. *Tällöin seuraavat väitteet pätevät:*

a) *Jos* $\bar{u}$, $\bar{w} \in W$, *niin* $\bar{u} + \bar{w} \in W$.

b) *Jos* $\bar{w} \in W$ *ja* $c \in \mathbb{R}$, *niin* $c\bar{w} \in W$.

c) $\bar{0} \in W$.

Todistus. Osoitetaan kohta a) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Oletetaan, että $\bar{u}, \bar{w} \in W$. Nyt $\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$ joillakin $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$ joillakin $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{u} + \bar{w} &= (a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k) + (b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k)\\ &= (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k + b_k)\bar{v}_k.\end{aligned}$$

Siten $\bar{u} + \bar{w} \in W$. □

Esimerkki 4.5. Tutkitaan, kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. On siis selvitettävä, onko olemassa reaalilukuja x_1, x_2, x_3, joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}.$$

Toisin sanoen on pääteltävä, onko $\bar{w}$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio.

Sijoittamalla annetut vektorit yllä olevaan yhtälöön saadaan

$$x_1(0, -1, 2, 1) + x_2(2, 0, 1, -1) + x_3(4, 2, 2, 0) = (-2, 3, 2, -1)$$

ja laskemalla kerto- ja yhteenlaskut auki yhtälö voidaan vielä muuttaa muotoon

$$(2x_2 + 4x_3,\ -x_1 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2) = (-2, 3, 2, -1).$$

Kun tarkastellaan jokaista komponenttia erikseen, saatua vektoriyhtälöä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \phantom{-x_1 +{}} 2x_2 + 4x_3 &= -2\\ -x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 &= 3\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2\\ x_1 - x_2 &= -1 \end{cases}$$

Miten tällainen yhtälöryhmä ratkaistaan? Ennen kuin syvennymme enemmän vektoreiden virittämiin aliavaruuksiin, on syytä perehtyä yhtälöryhmien ratkaisemiseen.