3 Suorat ja tasot

Tässä luvussa käsitellään avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ suoria ja tasoja vektoreiden näkökulmasta.

3.1 Suora

Havaitsimme skalaarikertolaskun tulkinnan yhteydessä, että jos $\bar{v}$ on mikä tahansa nollasta poikkeava tason $\mathbb{R}^2$ vektori ja t on jokin reaaliluku, niin vektori $t\bar{v}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{v}$ kanssa. Tällöin nähdään myös, että näitä vektoreita vastaavat koordinaatiston pisteet sijaitsevat samalla suoralla. Voidaan siis sanoa, että vektorijoukkoa

$$\{t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

vastaava pistejoukko muodostaa koordinaatiston suoran. Kullakin kertoimen t valinnalla saadaan jokin suoran pisteistä. Jos valitaan $t = 1$, saadaan alkuperäinen piste $\bar{v}$.

Kun edellä mainitussa esityksessä $t\bar{v}$ valitaan $t = 0$, saadaan nollavektori $\bar{0}$. Nollavektori on siis aina mukana muotoa (1) olevassa suorassa. Jos halutaan muodostaa vektoreista suora, joka ei kulje origon kautta, on origo ensin ”siirrettävä” haluttuun paikkaan. Tämä näkyy seuraavassa määritelmässä. Määritelmä toimii yhtä hyvin kaksi- kuin kolmiulotteisessakin avaruudessa.

Määritelmä 3.1. Olkoon $n = 2$ tai $n = 3$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *suora* on joukko

$$\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Vektoria $\bar{p}$ kutsutaan suoran *paikkavektoriksi* ja vektoria $\bar{v}$ suoran *suuntavektoriksi*.

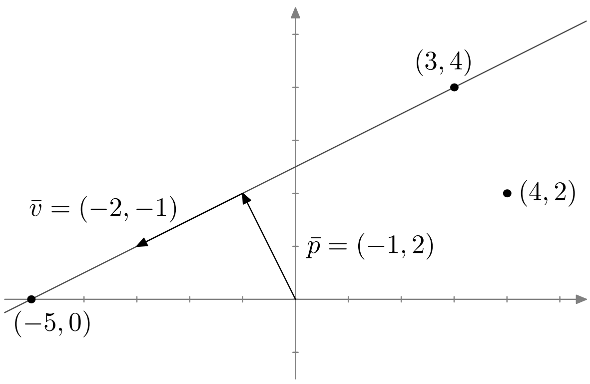
Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^2$ suora. Jos $(a, b) \in S$, niin sanotaan, että piste (a, b) *on suoralla* S tai että suora S *kulkee pisteen* (a, b) *kautta*. Vastaavia ilmauksia käytetään avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Huom. Yllä ei ole annettu mitä tahansa suoran kuvailua, vaan suoran *määritelmä*. Emme siis ole lähteneet esimerkiksi jostakin suoran geometrisestä muotoilusta ja ilmaisseet saman asian vektoreilla, vaan määritelleet suoran käsitteen tämän kurssin tarpeita varten uudelleen.

Esimerkki 3.2. Esimerkiksi joukko

$$S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

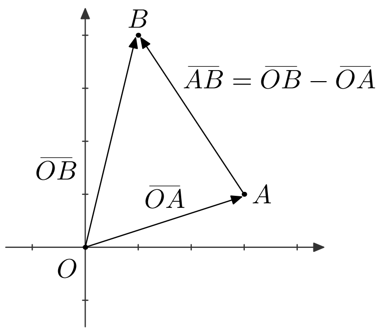
on suora. Se on piirretty kuvaan 3.8. Määritelmän mukaan mikä tahansa suoran S piste voidaan kirjoittaa summana vektorista $\bar{p} = (-1, 2)$ ja jostakin vektorin $\bar{v} = (-2, -1)$ skalaarimonikerrasta. Esimerkiksi $(-5, 0) = \bar{p} + 2\bar{v}$ ja $(3, 4) = \bar{p} - 2\bar{v}$, joten $(-5, 0) \in S$ ja $(3, 4) \in S$. Siis suora S kulkee pisteiden $(-5, 0)$ ja $(3, 4)$ kautta.



Kuva 3.8: Suora S avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Toisaalta piste $(4,2)$ ei ole suoralla S. Jos nimittäin $(4,2) = (-1,2)+t(-2,-1)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$, niin $4 = -1 - 2t$ ja $2 = 2 - t$. Ensimmäisen yhtälön perusteella $t = -5/2$ ja toisen perusteella $t = 0$. Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua $t \in \mathbb{R}$, jolle pätee $(4,2) = (-1,2) + t(-2,-1)$. Siispä $(4,2) \notin S$.

Ryhdytään seuraavaksi määrittämään suoraa, joka kulkee annettujen pisteiden kautta. Sitä ennen otetaan käyttöön muutama merkintä. Oletetaan, että A ja B ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ pisteitä. Vektori $\overline{AB}$ on vektori, jota vastaavan suuntajanan alkupiste on A ja päätepiste on B (ks. kuva 3.9). Origoa on tapana merkitä kirjaimella O. Siten pisteen A paikkavektorille saadaan merkintä $\overline{OA}$.

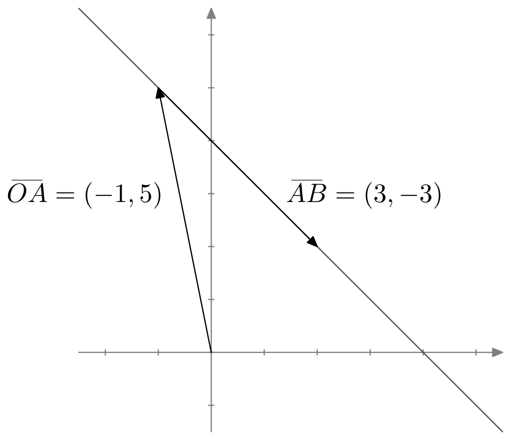


Kuva 3.9: Vektorit $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{AB}$.

Esimerkki 3.3. Tutkitaan, millainen on pisteiden $A = (-1,5)$ ja $B = (2,2)$ kautta kulkeva suora. Tätä varten tarvitaan suoralle paikkavektori. Paikkavektoriksi käy minkä tahansa suoran pisteen paikkavektori, esimerkiksi vektori $\overline{OA} = (-1,5)$. Suuntavektoriksi käy mikä tahansa suoran suuntainen vektori, esimerkiksi vektori

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2,2) - (-1,5) = (3,-3).$$

Näin saadaan suora $\{(-1,5) + t(3,-3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.



Kuva 3.10: Suora $\{(-1, 5) + t(3, -3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Varmistutaan vielä siitä, että annetut pisteet A ja B todellakin ovat suoralla. Huomataan, että $(-1, 5) = (-1, 5) + 0 \cdot (3, -3)$ ja $(2, 2) = (-1, 5) + (3, -3)$. Siten pisteet A ja B ovat suoralla.

Vastaavalla menetelmällä on aina mahdollista määrittää kahden pisteen kautta kulkeva suora, vaikka asiaa ei sen tarkemmin tässä osoitetakaan.

Suoran paikka- ja suuntavektorit eivät ole yksikäsitteisiä, sillä sama suora voidaan kirjoittaa joukkona $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ usealla eri tavalla. Itse asiassa on mahdollista osoittaa, että

- vektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita suoran minkä tahansa pisteen paikkavektori
- vektoriksi $\bar{v}$ voidaan valita mikä tahansa suoran suuntainen vektori.

Väitteitä ei todisteta tässä; todistukset voi halutessaan laatia hieman haastavampana harjoitustehtävänä.

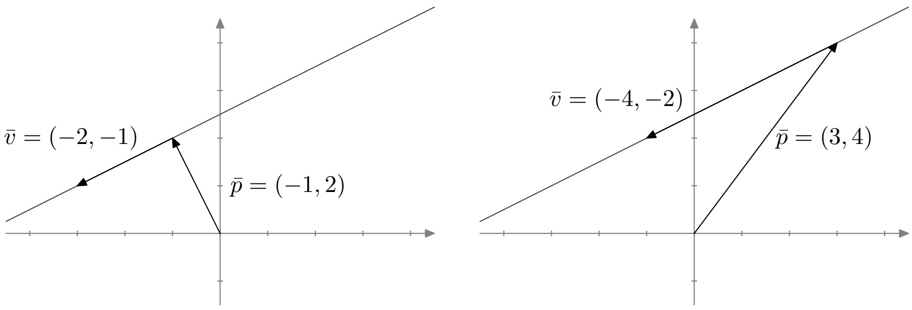
Esimerkki 3.4. Esimerkin 3.2 suoralle $S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ on mahdollista valita paikkavektoriksi piste $(3, 4)$ ja suuntavektoriksi vektori $(-4, -2)$. Tällöin S voidaan kirjoittaa muodossa

$$\{(3, 4) + s(-4, -2) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Vaikka tämä joukko onkin äkkiseltään katsottuna erilainen kuin suoran S alkuperäinen määritelmä, on joukoissa täsmälleen samat alkiot. Asiaa on havainnollistettu kuvassa 3.11.

Osoitetaan vielä huolellisesti, että joukot $S = \{(-1, 2) + t(-2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja $S' = \{(3, 4) + s(-4, -2) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ovat samat. Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.

"$\subset$": Osoitetaan ensin, että $S \subset S'$. Tämä tehdään näyttämällä, että jokainen joukon S alkio on joukossa S'. Oletetaan, että $\bar{a} \in S$. Joukon S määritelmän



Kuva 3.11: Suoran paikkavektori ja suuntavektori eivät ole yksikäsitteisiä.

perusteella pätee $\bar{a} = (-1, 2) + t(-2, -1)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (-1, 2) + t(-2, -1) = (-1, 2) + (-2 + 2 + t)(-2, -1) \\ &= (-1, 2) - 2(-2, -1) + (2 + t)(-2, -1) \\ &= (3, 4) + (2 + t)(-2, -1) = (3, 4) + \frac{2 + t}{2}(-4, -2).\end{aligned}$$

Koska $(2 + t)/2 \in \mathbb{R}$, viimeisestä muodosta nähdään, että $\bar{a} \in S'$. (Joukon S' määritelmässä voidaan valita $s = (2 + t)/2$.) On siis osoitettu, että $S \subset S'$.

"$\supset$": Osoitetaan sitten, että $S' \subset S$, eli näytetään, että jokainen joukon S' alkio on joukossa S. Oletetaan, että $\bar{a} \in S'$. Nyt $\bar{a} = (3, 4) + s(-4, -2)$ jollakin $s \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (3, 4) + s(-4, -2) = (3, 4) + (-4, -2) + (s - 1)(-4, -2) \\ &= (-1, 2) + (s - 1)(-4, -2) = (-1, 2) + 2(s - 1)(-2, -1).\end{aligned}$$

Koska $2(s - 1) \in \mathbb{R}$, nähdään, että $\bar{a} \in S$. Näin on osoitettu, että $S' \subset S$.

3.2 Taso

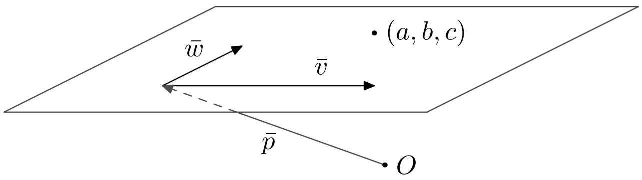
Kolmiulotteisessa avaruudessa voidaan määritellä tasot samaan tapaan kuin suorat. Nyt tarvitaan kuitenkin kahta suuntavektoria, ja näiden täytyy olla erisuuntaiset.

Määritelmä 3.5. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *taso* on joukko

$$\{\bar{p} + s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ ja vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaiset. Vektoria $\bar{p}$ kutsutaan tason *paikkavektoriksi* ja vektoreita $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ tason *suuntavektoreiksi.*

Olkoon T avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso. Jos $(a, b, c) \in T$, niin sanotaan, että piste (a, b, c) *on tasossa* T tai että taso T *kulkee pisteen* (a, b, c) *kautta.* Tasoa ja siinä olevaa pistettä on havainnollistettu kuvassa 3.12.

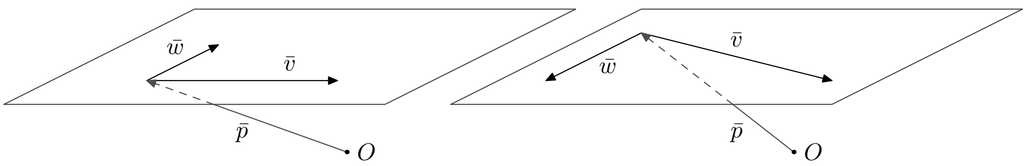


Kuva 3.12: Piste (a, b, c) on tasossa T.

Kuten suorien kohdalla voidaan tasojenkin tapauksessa osoittaa, että sama taso on mahdollista kirjoittaa usealla eri tavalla joukkona $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Tarkemmin sanoen

- vektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita tason minkä tahansa pisteen paikkavektori
- vektoreiksi $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ voidaan valita mitkä tahansa tason suuntaisen vektorit, kunhan $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 3.13. Tarkka todistus jätetään jälleen (haastavaksi) harjoitustehtäväksi.



Kuva 3.13: Taso voidaan kirjoittaa eri tavoin joukkona $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Esimerkki 3.6. Määritetään pisteiden $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ ja $C = (-2, 0, 1)$ kautta kulkeva taso T. Valitaan ensin tason paikkavektori. Esimerkiksi tason pisteen A paikkavektori $\overline{OA} = (0, 1, 0)$ käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan tason suuntaiset suuntavektorit:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-1, 2, 2) \quad \text{ja} \quad \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (-2, -1, 1).$$

Huomaa, että vektorit eivät ole yhdensuuntaiset, sillä $\overline{AB} \neq r\overline{AC}$ kaikilla nollasta poikkeavilla reaaliluvuilla r. (Tämä pitäisi tietysti todistaa täsmällisesti, mutta sivuutamme sen.) Näin saadaan taso

$$\begin{aligned} T &= \{\overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 1, 0) + s(-1, 2, 2) + t(-2, -1, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$