2 Avaruus $\mathbb{R}^n$

Edellisessä luvussa käsiteltiin avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektoreita eli reaalilukupareja ja reaalilukukolmikoita. Näitä avaruuksia voidaan yleistää määrittelemällä n-ulotteinen avaruus $\mathbb{R}^n$.

Määritelmä 2.1. Oletetaan, että $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiot ovat reaaliluvuista koostuvia n-jonoja. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita kutsutaan *vektoreiksi.*

Jos $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, niin lukuja $v_1, v_2, \dots, v_n$ kutsutaan vektorin $\bar{v}$ *komponenteiksi.* Sovimme, että ellei toisin mainita, vektorin $\bar{v}$ komponentteja merkitään symboleilla $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Yleisille n-ulotteisen avaruuden vektoreille määritellään laskutoimitukset samoin kuin kaksi- ja kolmiulotteisessa tapauksessa.

Määritelmä 2.2. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1,\, v_2 + w_2,\, \dots,\, v_n + w_n) \quad \text{ja} \\ c\bar{v} &= (cv_1,\, cv_2,\, \dots,\, cv_n).\end{aligned}$$

Ensimmäistä laskutoimitusta nimitetään vektorien *yhteenlaskuksi* ja toista *skalaarikertolaskuksi.*

Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan *skalaareiksi.* Jos $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$, vektoria $c\bar{v}$ nimitetään vektorin $\bar{v}$ *skalaarimonikerraksi.*

Huom. Ainoastaan samanulotteisen avaruuden vektoreita voi laskea yhteen.

Määritelmä 2.3. Vektorin $\bar{v}$ *vastavektori* on skalaarimonikerta $(-1)\bar{v}$. Sitä merkitään $-\bar{v}$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotus* on summa $\bar{v} + (-\bar{w})$. Sitä merkitään $\bar{v} - \bar{w}$. Vektoria $(0, 0, \dots, 0)$ kutsutaan *nollavektoriksi.* Sille käytetään merkintää $\bar{0}$.

Esimerkki 2.4. Merkitään $\bar{v} = (-5, 3, 0, 1, -1)$ ja $\bar{w} = (-2, -4, 2, 3, 5)$. Tällöin $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^5$ vektoreita. Lasketaan vektorit $2\bar{v} - 3\bar{w}$ ja $-5\bar{v} - \bar{w}$:

$$\begin{aligned}2\bar{v} - 3\bar{w} &= (-10, 6, 0, 2, -2) - (-6, -12, 6, 9, 15) = (-4, 18, -6, -7, -17) \\ -5\bar{v} - \bar{w} &= (25, -15, 0, -5, 5) - (-2, -4, 2, 3, 5) = (27, -11, -2, -8, 0).\end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille pätevät koulusta tutut laskusäännöt.

Lause 2.5. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee:*

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ *(vaihdannaisuus)*
2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ *(liitännäisyys)*
3. $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$
4. $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ *(osittelulaki)*
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ *(osittelulaki)*
7. $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$
8. $1\bar{v} = \bar{v}$.

Huom. Lause tarkoittaa väitettä, joka voidaan perustella todeksi nojautumalla määritelmiin ja aikaisemmin todeksi osoitettuihin väitteisiin.

Todistus. Todistetaan esimerkin vuoksi kohta 1 ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Oletetaan kuten lauseessa, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, ja luvut $v_1, \ldots, v_n$ ja $w_1, \ldots, w_n$ ovat reaalilukuja. Jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $v_i + w_i = w_i + v_i$, koska reaalilukujen yhteenlasku on vaihdannainen. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned} \bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1,\ v_2 + w_2,\ \ldots,\ v_n + w_n) \\ &= (w_1 + v_1,\ w_2 + v_2,\ \ldots,\ w_n + v_n) = \bar{w} + \bar{v}. \end{aligned}$$

Väite on todistettu. □

Tasovektorien yhteydessä todettiin, että skalaarikertolasku säilyttää (tai kääntää) vektorin suunnan. Otetaan tämä havainto yleisten vektorien yhdensuuntaisuuden määritelmäksi.

Määritelmä 2.6. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat *yhdensuuntaiset*, jos $\bar{v} = r\bar{w}$ jollakin $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin merkitään $\bar{v} \parallel \bar{w}$.

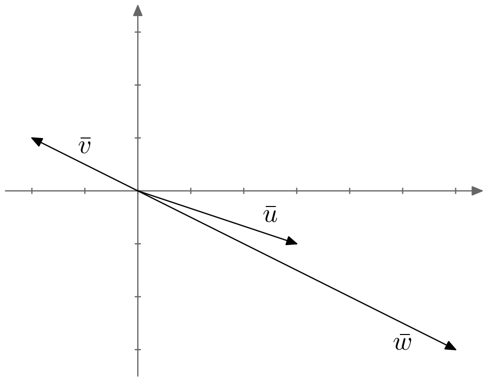
Esimerkki 2.7. Vektorit $\bar{v} = (-2, 1)$ ja $\bar{w} = (6, -3)$ ovat yhdensuuntaiset, sillä $\bar{v} = -\frac{1}{3}\bar{w}$. Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u} = (3, -1)$ eivät puolestaan ole yhdensuuntaiset, mikä voidaan päätellä seuraavasti. Jos olisi olemassa $r \in \mathbb{R}$, jolle pätisi $\bar{v} = r\bar{u}$, niin täytyisi olla

$$\underbrace{(-2, 1)}_{\bar{v}} = r\,\underbrace{(3, -1)}_{\bar{u}} = (3r, -r).$$

Siispä $-2 = 3r$ ja $1 = -r$. Ensimmäisen yhtälön mukaan $r = -2/3$, mutta toisen yhtälön mukaan $r = -1$. Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua r, jolle pätee $\bar{v} = r\bar{u}$. Siten vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

Vektorit $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ on esitetty kuvassa 2.6.

Yhdensuuntaisuuden määritelmää voidaan myös yleistää ottamalla mukaan useampia vektoreita. Tällöin päädytään käsitteeseen, jota tarvitaan jatkossa hyvin monesti vektoriavaruuksien ominaisuuksia tutkittaessa.



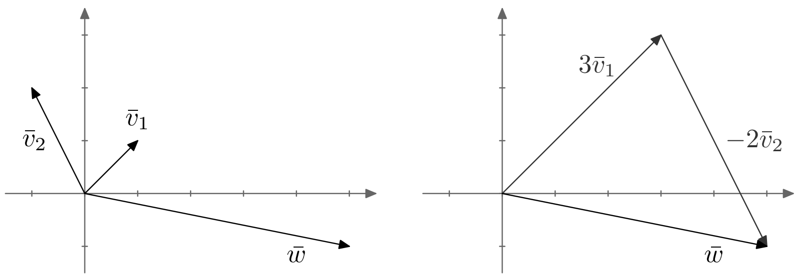
Kuva 2.6: Esimerkin 2.7 vektorit $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$.

Määritelmä 2.8. Vektori $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *lineaarikombinaatio* eli *lineaariyhdistelmä*, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $a_1, a_2, \dots, a_k$, että

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k.$$

Esimerkki 2.9. Merkitään $\bar{v}_1 = (1,1)$, $\bar{v}_2 = (-1,2)$ ja $\bar{w} = (5,-1)$. Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatio, sillä

$$\begin{aligned}3\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 &= 3(1,1) - 2(-1,2) = (3,3) - (-2,4)\\ &= (5,-1) = \bar{w}.\end{aligned}$$



Kuva 2.7: Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatio.

Edellisessä esimerkissä arvattiin, mitkä kertoimien a_1 ja a_2 pitää olla, jotta pätisi $\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2$. Myöhemmin esitellään keino kertoimien selvittämiseksi kaikissa mahdollisissa tilanteissa.