14 Ristitulo

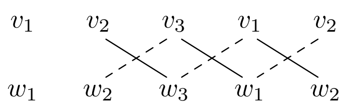
Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreille voidaan määritellä pistetulon lisäksi niin kutsuttu ristitulo. Pistetulosta poiketen ristitulon tulos ei ole reaaliluku vaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori. Ristitulosta on hyötyä esimerkiksi silloin, kun tarvitaan vektori, joka on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Ristitulo poikkeaa kaikista kurssilla tähän mennessä määritellyistä käsitteistä siinä, että sen määritelmää ei voida yleistää kaikkiin avaruuksiin $\mathbb{R}^n$. Ristitulo on nimenomaan kolmiulotteisen avaruuden laskutoimitus.

Määritelmä 14.1. Vektorien $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ *ristitulo* on vektori

$$\bar{v} \times \bar{w} = (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1).$$

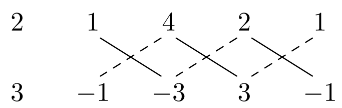
Ristitulon $\bar{v} \times \bar{w}$ laskemiseen voi käyttää kuvassa 14.38 esitettyä laskusääntöä. Yhtenäisellä viivalla yhdistettyjen komponenttien tulosta vähennetään katkoviivalla yhdistettyjen komponenttien tulo.



Kuva 14.38: Ristitulon $\bar{v} \times \bar{w}$ laskeminen.

Esimerkki 14.2. Merkitään $\bar{a} = (2, 1, 4)$ ja $\bar{b} = (3, -1, -3)$. Kuvan 14.39 perusteella voidaan laskea

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1),\ 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-3),\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) \\ &= (1, 18, -5). \end{aligned}$$



Kuva 14.39: Ristitulon $\bar{a} \times \bar{b}$ laskeminen.

Ristitulolle saadaan toinen muistisääntö determinantin avulla. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ristitulo saadaan laskemalla determinantti

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Tässä $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ ja $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$. Tarkalleen ottaen determinantin alkiot eivät voi olla vektoreita. Kyseessä on kuitenkin vain muistisääntö, ja vektoreiden $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ja $\bar{e}_3$ ajatellaan käyttäytyvän determinanttia laskettaessa reaalilukujen tavoin.

Esimerkki 14.3. Esimerkiksi vektoreiden $\bar{a} = (2, 1, 4)$ ja $\bar{b} = (3, -1, -3)$ ristitulo on

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \bar{e}_1\big(1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1)\big) - \bar{e}_2\big(2 \cdot (-3) - 4 \cdot 3\big) + \bar{e}_3\big(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3\big) \\
&= \bar{e}_1 - 18\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3 = (1, 18, -5).
\end{aligned}$$

Eräs ristitulon sovelluksista on se, että sen avulla voidaan löytää vektori, joka on kohtisuorassa yhtä aikaa kahta vektoria vastaan.

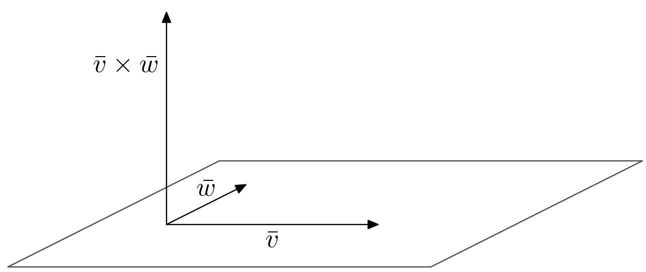
Lause 14.4. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin*

$$(\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{v} \quad \textit{ja} \quad (\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{w}.$$

Todistus. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{v} &= (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1) \cdot (v_1, v_2, v_3) \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)v_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)v_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)v_3 \\
&= v_2w_3v_1 - v_3w_2v_1 + v_3w_1v_2 - v_1w_3v_2 + v_1w_2v_3 - v_2w_1v_3 = 0.
\end{aligned}$$

Siten vektorit $(\bar{v} \times \bar{w})$ ja $\bar{v}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väitteen toinen osa osoitetaan samalla tavalla. □

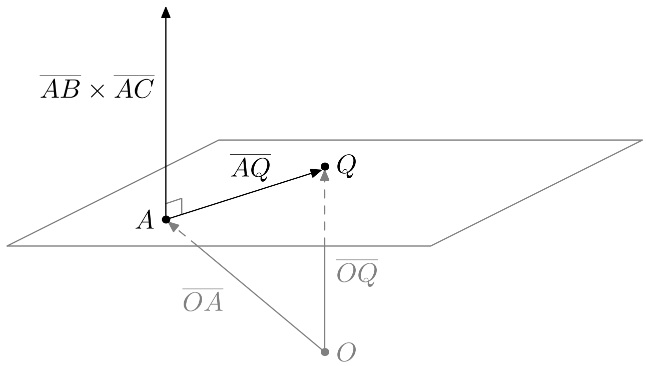


Kuva 14.40: Ristitulo $\bar{v} \times \bar{w}$ on kohtisuorassa vektoria $\bar{v}$ ja vektoria $\bar{w}$ vastaan.

Edellisestä lauseesta seuraa, että ristitulon avulla voidaan löytää tason normaali (eli vektori, joka on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan). Tästä on hyötyä tason normaalimuotoisen yhtälön määrittämisessä.

Esimerkki 14.5. Määritetään normaalimuotoinen yhtälö tasolle T, joka kulkee pisteiden $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ ja $C = (-2, 0, 1)$ kautta. Tätä varten tarvitaan tason T normaali. Normaali on vektori, joka on kohtisuorassa suuntavektoreita vastaan. Valitaan suuntavektoreiksi suuntajanat $\overline{AB} = (-1, 2, 2)$ ja $\overline{AC} = (-2, -1, 1)$, jolloin normaaliksi käy edellisen lauseen nojalla vektorien ristitulo

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (4, -3, 5).$$



Kuva 14.41: Tason T normaalimuotoisen yhtälön määrittäminen.

Lisäksi tarvitaan jokin tason paikkavektori, kuten esimerkiksi $\overline{OA} = (0,1,0)$. Kun merkitään vielä $\bar{q} = \overline{OQ} = (x,y,z)$, tason normaalimuotoiseksi yhtälöksi saadaan

$$\underbrace{(\overline{AB} \times \overline{AC})}_{\text{normaali}} \cdot (\overline{OQ} - \overline{OA}) = 0.$$

Kun yhtälöön sijoitetaan luvut, se tulee muotoon

$$(4,-3,5) \cdot (x, y-1, 0) = 0.$$

Laskemalla pistetulo saadaan yhtälö lopulliseen muotoon

$$4x - 3y + 5z + 3 = 0.$$

Näin ollen $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 3y + 5z + 3 = 0\}$.

Esimerkki 14.6. Pisteen etäisyys tasosta voidaan määrittää ristitulon ja projektion avulla. Merkitään $A = (0,1,0)$, $B = (-1,3,2)$ ja $C = (-2,0,1)$. Oletetaan, että taso T kulkee pisteiden A, B ja C kautta. Määritetään pisteen $D = (1,2,3)$ etäisyys tasosta T (ks. kuva 14.42).

Tason suuntaisten vektoreiden $\overline{AB} = (-1,2,2)$ ja $\overline{AC} = (-2,-1,1)$ ristitulo

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (4,-3,5)$$

on tason normaali. Lisäksi tarvitaan vektori jostakin tason pisteestä pisteeseen $D = (1,2,3)$. Valitaan vektori

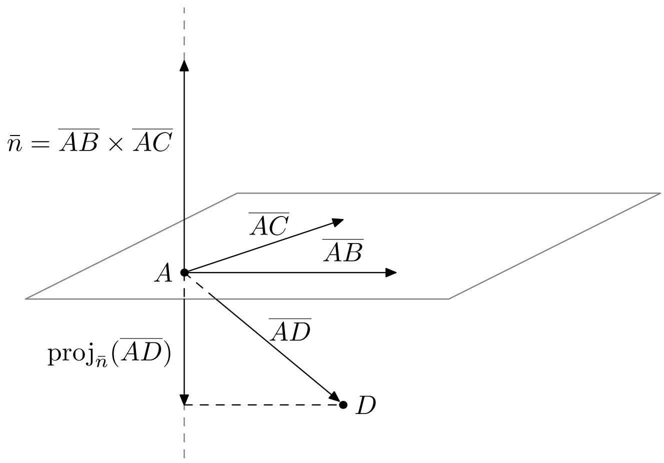
$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (1,1,3).$$

Vektorin $\overline{AD}$ projektio normaalin $\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD}) = \frac{\overline{AD} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}}\,\bar{n} = \frac{16}{50}\,(4,-3,5) = \frac{8}{25}\,(4,-3,5).$$

Tämän projektion normi (eli pituus) on pisteen P etäisyys tasosta T:

$$\|\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD})\| = \frac{8}{25}\,\|(4,-3,5)\| = \frac{8}{25}\sqrt{16+9+25} = \frac{8}{25}\sqrt{50} = \frac{8}{5}\sqrt{2}.$$



Kuva 14.42: Pisteen D etäisyys tasosta T.

Käydään vielä läpi muutamia ristituloon liittyviä laskusääntöjä.

Lause 14.7. *Oletetaan, että $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $\bar{v} \times \bar{w} = -(\bar{w} \times \bar{v})$ *(antikommutointi)*

b) $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$ *(osittelulaki)*

c) $(\bar{v} + \bar{w}) \times \bar{u} = \bar{v} \times \bar{u} + \bar{w} \times \bar{u}$ *(osittelulaki)*

d) $c(\bar{v} \times \bar{w}) = (c\bar{v}) \times \bar{w} = \bar{v} \times (c\bar{w})$

e) $\bar{v} \times \bar{v} = \bar{0}$

f) $\bar{0} \times \bar{v} = \bar{0}$ *ja* $\bar{v} \times \bar{0} = \bar{0}$

g) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

Todistus. Lauseen todistus on suoraviivainen ja käyttää ainoastaan ristitulon määritelmää. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Ristitulolla on myös pistetuloon liittyviä laskusääntöjä.

Lause 14.8. *Oletetaan, että $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin*

a) $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}$

b) $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$

c) $\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2$ *(Lagrangen identiteetti)*

Todistus. Osoitetaan kohta c) (eli Lagrangen identiteetti) ja jätetään muut kohdat harjoitustehtäviksi. Käyttämällä lauseen 14.7 kohtaa g) ja lauseen 14.8 kohtaa a) saadaan

$$\begin{aligned}
\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \big((\bar{v} \times \bar{w}) \times \bar{v}\big) \cdot \bar{w} \\
&= \big((\bar{v} \cdot \bar{v})\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}\big) \cdot \bar{w} = \big(\|\bar{v}\|^2\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}\big) \cdot \bar{w} \\
&= \|\bar{v}\|^2(\bar{w} \cdot \bar{w}) - (\bar{v} \cdot \bar{w})(\bar{v} \cdot \bar{w}) = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2.
\end{aligned}$$

Siten Lagrangen identiteetti pätee. $\square$

Lause 14.9. *Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Jos $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$, niin*

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin\alpha,$$

missä α on vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma.

Todistus. Todistuksessa käytetään Lagrangen identiteettiä (lause 14.8). Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan $\cos\alpha = (\bar{v} \cdot \bar{w})/(\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|)$, ja lisäksi pätee $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Nyt Lagrangen identiteetistä saadaan

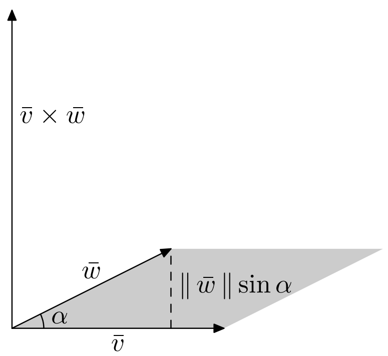
$$\begin{aligned}
\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\cos\alpha\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|)^2 \\
&= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - \cos^2\alpha\|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2(1 - \cos^2\alpha) \\
&= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 \sin^2\alpha = (\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin\alpha)^2.
\end{aligned}$$

Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan $0° \leq \alpha \leq 180°$, mistä seuraa, että $\sin\alpha \geq 0$. Lisäksi vektorien normit ovat aina epänegatiivisia. Siten $\|\bar{v} \times \bar{w}\| \geq 0$ ja $\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin\alpha \geq 0$. Saadusta yhtälöstä voidaan näin ollen päätellä, että

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin\alpha.$$

Tämä todistaa väitteen. $\square$

Edellisestä lauseesta seuraa, että ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan ala (ks. kuva 14.43). Oletetaan, että vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on α. Tällöin suunnikkaan korkeus on $\|\bar{w}\| \sin\alpha$. Näin suunnikkaan pinta-alaksi saadaan $\|\bar{w}\| \sin\alpha \cdot \|\bar{v}\| = \|\bar{v} \times \bar{w}\|$.



Kuva 14.43: Ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan ala.

Ristitulon avulla voidaan määrittää myös suuntaissärmiön tilavuus. Vektoreiden $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ määräämään suuntaissärmiön tilavuus on pohjan pinta-alan $\|\bar{v} \times \bar{w}\|$

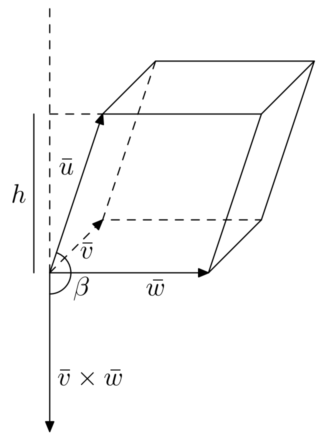
ja korkeuden h tulo (ks. kuva 14.44). Pohjan pinta-alan tiedetään edellisen kappaleen perusteella olevan $\|\bar{v}\times\bar{w}\|$. Määritetään vielä korkeus h. Olkoon β vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}\times\bar{w}$ välinen kulma. Nyt

$$h = \|\bar{u}\|\,|\cos(180^\circ - \beta)| = \|\bar{u}\|\,|\cos\beta|\,.$$

Siten tilavuus on

$$\|\bar{v}\times\bar{w}\|\|\bar{u}\|\,|\cos\beta| = \Big|\|\bar{v}\times\bar{w}\|\|\bar{u}\|\cos\beta\Big| = \Big|(\bar{v}\times\bar{w})\cdot\bar{u}\Big|.$$

Viimeisessä välivaiheessa käytettiin vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v}\times\bar{w}$ välisen kulman määritelmää. Suunnikkaan tilavuus on siis niin kutsutun *skalaarikolmitulon* itseisarvo.



Kuva 14.44: Vektoreiden $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ määräämään suuntaissärmiön tilavuus.