13 Pistetulo

Avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ on totuttu puhumaan vektorien pituuksista ja vektoreiden välisistä kulmista. Kuten tavallista, näiden käsitteiden yleistäminen korkeampiulotteisiin avaruuksiin ei onnistu pelkästään geometrisen intuition avulla. Kuitenkin esimerkiksi Pythagoraan lauseen voidaan ajatella toimivan kaikissa ulottuvuuksissa samalla tavalla. Tämä ja muut tähän liittyvät käsitteet voidaan ilmaista pistetulon avulla, ja pistetulo puolestaan voidaan laskea avaruudessa $\mathbb{R}^n$, oli n miten suuri tahansa.

Määritelmä 13.1. Vektoreiden $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

Vektorien pistetulo on aina reaaliluku. Esimerkiksi vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ pistetulo on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 3 \cdot 1 + (-2)(-2) + 0 \cdot \sqrt{3} = 7.$$

Pistetulolle voidaan todistaa laskusääntöjä.

Lause 13.2. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

b) $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$

c) $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$

Todistus. Todistetaan kohta b) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Merkitään $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ ja $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned}
\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) &= (v_1, \dots, v_n) \cdot (w_1 + u_1, w_2 + u_2, \dots, w_n + u_n) \\
&= v_1(w_1 + u_1) + v_2(w_2 + u_2) + \cdots + v_n(w_n + u_n) \\
&= v_1 w_1 + v_1 u_1 + v_2 w_2 + v_2 u_2 + \cdots + v_n w_n + v_n u_n \\
&= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n) + (v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n) \\
&= \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}.
\end{aligned}$$

Tässä käytettiin reaalilukujen yhteenlaskun ja kertolaskun osittelulakia. □

Seuraava lause osoittaa, että vektorin pistetulo itsensä kanssa on aina epänegatiivinen. Ainoastaan nollavektorin pistetulo itsensä kanssa on nolla.

Lause 13.3. *Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

a) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$

b) $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$, *jos ja vain jos* $\bar{v} = \bar{0}$.

Todistus.

a) Nähdään, että

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \geq 0 + 0 + \cdots + 0 = 0\,,$$

sillä reaaliluvun neliö on aina epänegatiivinen. Tämä todistaa väitteen.

b) "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$. Tällöin $v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = 0$. Koska jokainen yhteenlaskettava on epänegatiivinen, täytyy yhteenlaskettavien olla nollia. Toisin sanoen $v_i^2 = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tästä seuraa, että $v_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Siten $\bar{v} = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\bar{v} = \bar{0}$. Nyt $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 0$. Väite on todistettu. □

13.1 Vektorin normi

Pistetulon avulla voidaan määritellä avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorin normi eli pituus. Lauseen 13.3 nojalla $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$, joten seuraavassa määritelmässä juurrettava on epänegatiivinen, kuten kuuluu olla.

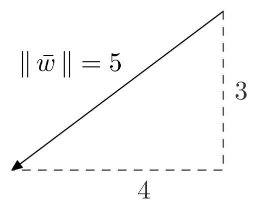
Määritelmä 13.4. Vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli *pituus* on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

Määritelmästä seuraa, että $\|\bar{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$. Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = (1/2, 3, -2, 0)$ normi on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{(1/2)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{53}{4}} = \frac{\sqrt{53}}{2}.$$

Tason vektoreiden normia voidaan havainnollistaa Pythagoraan lauseen avulla. Kuvassa 13.24 on esitetty vektori $\bar{w} = (-4, -3)$. Sen pituus on Pythagoraan lauseen nojalla $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Pituuden geometrinen tulkinta antaa siis saman tuloksen kuin määritelmä 13.4. Myös kolmiulotteisen avaruuden vektorin pituus on sama normin ja Pythagoraan lauseen avulla laskettuna.



Kuva 13.24: Vektorin $\bar{w}$ normi eli pituus.

Seuraava lause selittää normien avulla sen tosiasian, että vektorin pituus on aina epänegatiivinen ja nollavektori on ainoa vektori, jonka pituus on nolla.

Lause 13.5. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$*. Tällöin*

a) $\|\bar{v}\| \geq 0$

b) $\|\bar{v}\| = 0$*, jos ja vain jos* $\bar{v} = 0$*.*

Todistus. Tulokset seuraavat suoraan normin määritelmästä, neliöjuuren ominaisuuksista ja lauseesta 13.3.

a) Määritelmän mukaan $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$. Neliöjuuren arvo on aina epänegatiivinen, joten $\|\bar{v}\| \geq 0$.

b) Huomataan, että $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = 0$, jos ja vain jos juurrettava $\bar{v} \cdot \bar{v}$ on nolla. Lauseen 13.3 nojalla taas $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$. Tämä todistaa väitteen. □

Lause 13.6. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *ja* $c \in \mathbb{R}$*. Tällöin* $\|c\bar{v}\| = |c|\|\bar{v}\|$*.*

Todistus. Pistetulon ominaisuuksien perusteella

$$\|c\bar{v}\| = \sqrt{c\bar{v} \cdot c\bar{v}} = \sqrt{c(\bar{v} \cdot c\bar{v})} = \sqrt{c^2(\bar{v} \cdot \bar{v})} = |c|\sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = |c|\|\bar{v}\|. \qquad \square$$

Usein ollaan kiinnostuneita erityisesti sellaisista vektoreista, joiden pituus on yksi. Tällöin on yleensä kyse tilanteesta, jossa vain vektorin suunnalla on merkitystä. Siksi pituus halutaan mahdollisimman yksinkertaiseksi.

Määritelmä 13.7. Vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ on *yksikkövektori*, jos sen normi on yksi eli

$$\|\bar{u}\| = 1.$$

Esimerkiksi luonnollisen kannan vektorit $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ ovat yksikkövektoreita, samoin kuin vektorit $\bar{e}_i \in \mathbb{R}^n$ aina, kun $1 \leq i \leq n$. Kaikkien yksikkövektoreiden komponentit eivät kuitenkaan ole näin yksinkertaisia.

Esimerkki 13.8. Etsitään yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen annetun vektorin $\bar{v} = (2, -1, 0)$ kanssa. Vektorin $\bar{v}$ normi on $\|\bar{v}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. Jos vektori $\bar{v}$ kerrotaan skalaarilla $1/\sqrt{5}$, saadaan vektori $(1/\sqrt{5})\bar{v}$, jonka pituus on lauseen 13.6 nojalla

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\|\bar{v}\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1.$$

Vektori $(1/\sqrt{5})\bar{v}$ on siis yksikkövektori. Lisäksi vektorit $\bar{v}$ ja $(1/\sqrt{5})\bar{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

Edellistä esimerkkiä yleistämällä saadaan seuraava tulos.

Lause 13.9. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$*. Tällöin vektori* $\dfrac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$ *on yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen* $\bar{v}$*:n kanssa.*

Todistus. Väite seuraa lauseesta 13.6 samalla tavalla kuin esimerkissä 13.8. □

Kun vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ tulkitaan tason pisteiksi, niiden välinen etäisyys voidaan määritellä niitä yhdistävän suuntajanan $\bar{v}-\bar{w}$ pituutena. Tämä taas palautuu vektorin normiin.

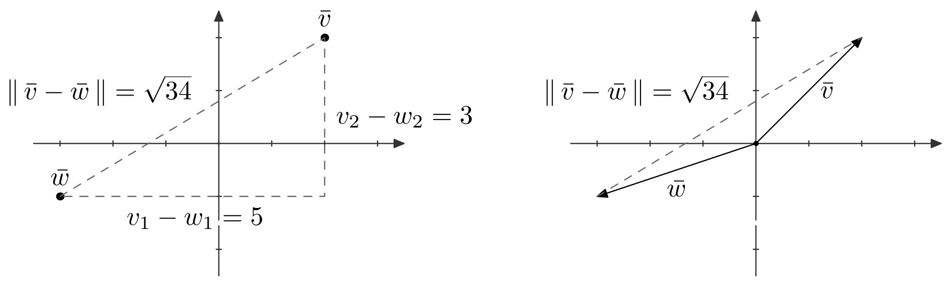
Määritelmä 13.10. Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen *etäisyys* on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\|.$$

Esimerkki 13.11. Vektoreiden $\bar{v} = (2, 2)$ ja $\bar{w} = (-3, -1)$ välinen etäisyys on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\| = \|(2 - (-3), 2 - (-1))\| = \|(5, 3)\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

Etäisyyttä on havainnollistettu kahdella eri tavalla kuvassa 13.25.



Kuva 13.25: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen etäisyys. Ensimmäisessä kuvassa vektorit on havainnollistettu tason pisteinä, jälkimmäisessä kuvassa paikkavektoreina.

Seuraava lause esittelee yleisen teorian kannalta tärkeän tuloksen, jota tässä vaiheessa kuitenkin tarvitaan lähinnä lemman 13.13 todistamiseen. Todistus on melko tekninen, ja siksi sen esitystä lykätään kurssin toiseen osaan.

Lause 13.12 (Schwarzin epäyhtälö). *Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

13.2 Vektorien välinen kulma ja kohtisuoruus

Tasossa kahden vektorin välinen kulma voidaan laskea pistetulon avulla. Yleisessä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ tyydymme geometrisen perustelun sijasta *määrittelemään* vektorien välisen kulman vastaavalla tavalla. Tähän tarvitaan kuitenkin seuraavaa lemmaa.

Lemma 13.13. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Tällöin*

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|} \leq 1.$$

Todistus. Schwarzin epäyhtälön 13.12 mukaan $|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|$. Tästä seuraa, että

$$-\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \leq \bar{v} \cdot \bar{w} \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

Jakamalla näin saadut epäyhtälöt positiivisella luvulla $\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|$ saadaan

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|} \leq 1. \qquad \square$$

Kosinifunktio on määritelty niin, että jokaista lukua $x \in [-1, 1]$ vastaa täsmälleen yksi sellainen kulma α, että $0° \leq \alpha \leq 180°$ ja $\cos\alpha = x$. Edellisen lemman nojalla voidaan siis asettaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 13.14. Vektorien $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ välinen kulma on se kulma α, jolle pätee $0° \leq \alpha \leq 180°$ ja

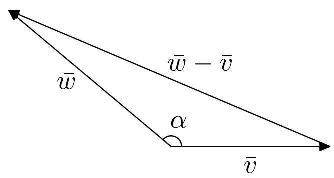
$$\cos\alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}.$$

Esimerkiksi vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{8}}.$$

Lisäksi täytyy pätee $0° \leq \alpha \leq 180°$. Laskimella saadaan vektorien välisen kulman likiarvoksi $\alpha \approx 46{,}65°$.

Määritelmän perustelu. Vaikka määritelmiä ei tarvitsekaan perustella mitenkään, on kuitenkin valaisevaa katsoa, miten vektorien välisen kulman määritelmä vastaa tasossa geometrista käsitystämme.



Kuva 13.26: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma kosinilauseen näkökulmasta.

Kosinilauseen mukaan kuvan 13.26 kolmiossa pätee

$$\|\bar{w} - \bar{v}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\alpha.$$

Toisaalta normin määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\|\bar{w} - \bar{v}\|^2 &= (\bar{w} - \bar{v}) \cdot (\bar{w} - \bar{v}) = \bar{w} \cdot \bar{w} - \bar{w} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{v} \\ &= \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2.\end{aligned}$$

Saadaan siis yhtälö

$$\|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\alpha = \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2,$$

josta edelleen

$$\cos\alpha = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}.$$

Vektorien pituuksien kohdalla erityisasemaan nostettiin yksikkövektorit. Kulmista puolestaan suora kulma on kaikkein tärkeimmässä asemassa. Jälleen kerran esitetään määritelmä yleisessä muodossaan ottamatta kantaa siihen, miltä suora kulma voisi moniulotteisessa avaruudessa ”näyttää”.

Määritelmä 13.15. Vektorit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0$. Tällöin merkitään $\bar{v} \perp \bar{w}$.

Yleensä kahden olion ajatellaan olevan kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden välinen kulma on $90°$. Tämä pitää paikkansa myös vektoreiden tapauksessa. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Määritelmän 13.14 mukaan vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on $90°$, jos ja vain jos

$$\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|} = \cos 90° = 0.$$

Tämä puolestaan pätee, jos ja vain jos $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0$. Siten vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on $90°$, jos ja vain jos $\bar{v}\cdot\bar{w} = 0$.

Pistetulon sovellus: normaalimuotoiset yhtälöt

Esimerkki 13.16. Tarkastellaan kaikkia avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita $\bar{v}$, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\bar{n} = (1, 2, 3)$ vastaan. Tällaiset vektorit toteuttavat yhtälön

$$\bar{n}\cdot\bar{v} = 0 \quad \text{eli} \quad v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0.$$

Vektorien muodostama joukko W voidaan kirjoittaa eri muodoissa:

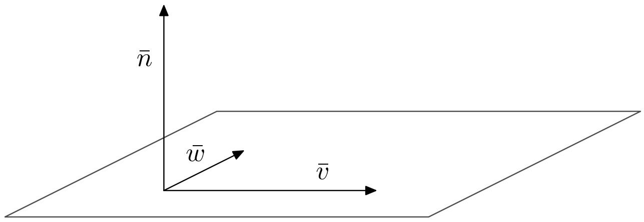
$$\begin{aligned} W &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 = -2v_2 - 3v_3\} \\ &= \{(-2v_2 - 3v_3,\ v_2,\ v_3) \mid v_2, v_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v_2(-2, 1, 0) + v_3(-3, 0, 1) \mid v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Viimeisestä muodosta nähdään, että kyseessä on origon kautta kulkeva taso.

Edellistä esimerkkiä voidaan yleistää, jolloin nähdään, että kaikki jotakin nollavektorista poikkeavaa vektoria vastaan kohtisuorassa olevat avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorit muodostavat tietyn tason, joka on samalla aliavaruus. Päätellään seuraavaksi sama asia toiseen suuntaan.

Tarkastellaan aluksi origon kautta kulkevaa tasoa $\{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Jos jokin vektori $\bar{n}$ on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita vastaan, niin kaikille tason vektoreille $s\bar{v} + t\bar{w}$ pätee

$$\bar{n}\cdot(s\bar{v} + t\bar{w}) = s(\bar{n}\cdot\bar{v}) + t(\bar{n}\cdot\bar{w}) = s\cdot 0 + t\cdot 0 = 0.$$



Kuva 13.27: Tason normaali $\bar{n}$.

Vektori $\bar{n}$ on siis kohtisuorassa kaikkia tason vektoreita vastaan, jolloin sanotaan, että se on *kohtisuorassa tasoa vastaan*. Tällaista vektoria kutsutaan tason *normaaliksi* (ks. kuva 13.27).

Olkoon T avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, joka kulkee origon kautta, ja olkoon $\bar{q}$ jokin tason normaali. Voidaan osoittaa, että piste $\bar{q}$ on tasossa T, jos ja vain jos

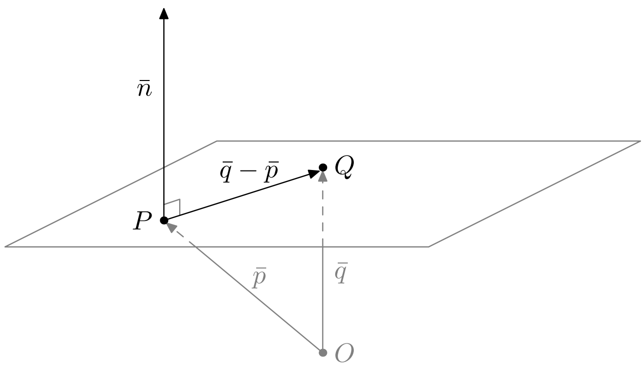
$$\bar{n} \cdot \bar{q} = 0.$$

Tällaista yhtälöä kutsutaan tason *normaalimuotoiseksi yhtälöksi*.

Jos taso ei kulje origon kautta, on sen vektoreita siirrettävä ennen normaalin määrittämistä. Oletetaan, että T on avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, jonka paikkavektori on $\bar{p}$ ja jolla on normaali $\bar{n}$. Nyt $\bar{q}$ on tasossa T, jos ja vain jos

$$\bar{n} \cdot (\bar{q} - \bar{p}) = 0.$$

Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 13.28.



Kuva 13.28: Tason T normaalimuotoisen yhtälön havainnollistus.

Esimerkki 13.17. Oletetaan, että taso T kulkee pisteen $P = (6, 0, 1)$ kautta ja sillä on normaali $\bar{n} = (1, 2, 3)$. Tason T normaalimuotoinen yhtälö on tällöin

$$(1, 2, 3) \cdot (\bar{q} - (6, 0, 1)) = 0.$$

Tasossa T ovat siis ne pisteet $\bar{q}$, jotka toteuttavat edellä esitetyn yhtälön. Toisin sanoen

$$T = \{\bar{q} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 2, 3) \cdot (\bar{q} - (6, 0, 1)) = 0\}.$$

Kirjoitetaan taso vielä hiukan toisenlaisessa muodossa. Merkitään $\bar{q} = (x, y, z)$, missä $x, y, z \in \mathbb{R}$. Nyt

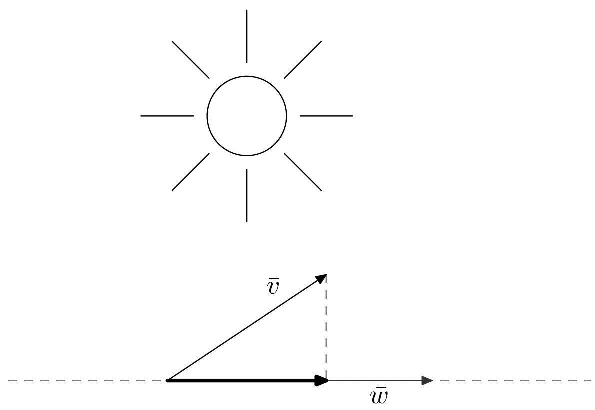
$$\begin{aligned}(1,2,3) \cdot (\bar{q} - (6,0,1)) &= (1,2,3) \cdot (x-6, y-0, z-1) \\ &= x - 6 + 2y + 3z - 3 \\ &= x + 2y + 3z - 9,\end{aligned}$$

joten voidaan kirjoittaa $T = \{\bar{q} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z - 9 = 0\}$.

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ suorille johdetaan normaalimuotoinen yhtälö samalla tavalla.

13.3 Projektio

Pistetulon avulla voidaan laskea myös vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle $\text{span}(\bar{w})$ (eli vektorin $\bar{w}$ suuntaiselle suoralle). Voidaan ajatella, että projektio on vektorin $\bar{v}$ heittämä varjo, kun aurinko paistaa kohtisuoraan vektoria $\bar{w}$ vastaan kuten kuvassa 13.29.



Kuva 13.29: Projektion havainnollistus.

Projektion määritelmäksi valitsemme yksinkertaisuuden vuoksi kaavan, jolla projektion voi suoraan laskea.

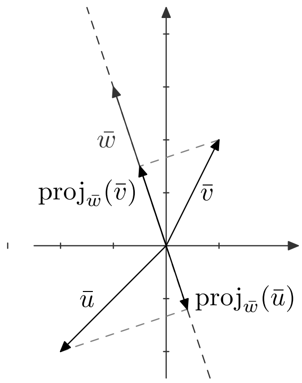
Määritelmä 13.18. Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ *projektio* vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Esimerkki 13.19. Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = (1, 2)$ projektio vektorin $\bar{w} = (-1, 3)$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\text{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{5}{10}(-1, 3) = \frac{1}{2}(-1, 3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Projektio on esitetty kuvassa 13.30.



Kuva 13.30: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ projektiot vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

Vektorin $\bar{u} = (-2, -2)$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on puolestaan

$$\text{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{-4}{10}(-1, 3) = -\frac{2}{5}(-1, 3) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right).$$

Tämä on esitetty samassa kuvassa.

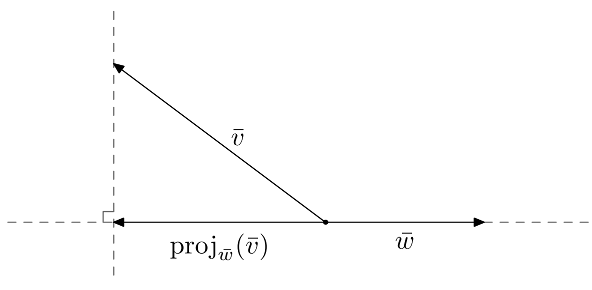
Lause 13.20. *Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ on vektorin $\bar{v}$ projektio aliavaruudelle* $\text{span}(\bar{w})$*. Tällöin*

a) vektori $\bar{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa

b) vektori $\bar{v} - \bar{u}$ on kohtisuorassa vektoria $\bar{w}$ vastaan.

Todistus. a) Määritelmästä nähdään, että $\bar{u} = \text{proj}_{\bar{w}}(v)$ on aina yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa. Vektori $\bar{u}$ saadaan nimittäin vektorista $\bar{w}$ kertomalla sitä skalaarilla $(\bar{v} \cdot \bar{w})/(\bar{w} \cdot \bar{w})$.

b) Jätetään lukijan harjoitustehtäväksi. $\square$



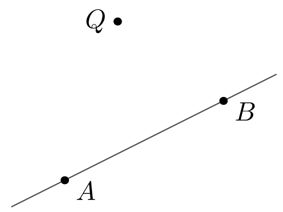
Kuva 13.31: Vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

Vektorin projektion voi määrittää myös geometrisesti (ks. kuva 13.31). Piirretään vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ alkamaan samasta pisteestä ja piirretään vektorin $\bar{w}$ suuntainen suora. Projektio $\text{proj}_{\bar{w}}(v)$ löydetään piirtämällä suora, joka on kohtisuorassa vektorin $\bar{w}$ suuntaista suoraa vastaan ja kulkee vektorin $\bar{v}$ kärjen kautta.

Projektion sovellus: pisteen etäisyys suorasta

Pisteen etäisyys suorasta voidaan määrittää projektion avulla. Pisteen Q etäisyys suorasta $S = \{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ on kaikkein lyhin välimatka, joka voi olla pisteen Q ja suoran S pisteen välillä. Täsmällisesti ilmaistuna pisteen Q etäisyys suorasta S on $\min\{d(\bar{q}, \bar{a}) \mid \bar{a} \in S\}$, missä $\bar{q}$ on pisteen Q paikkavektori.

Tutkitaan esimerkin avulla, kuinka projektiota voidaan käyttää etäisyyden määrittämisessä, ilman tarkkoja todistuksia. Määritetään pisteen $Q = (4, -1, 9)$ etäisyys suorasta S, joka kulkee pisteiden $A = (2, -3, 5)$ ja $B = (4, 1, 7)$ kautta (ks. kuva 13.32).

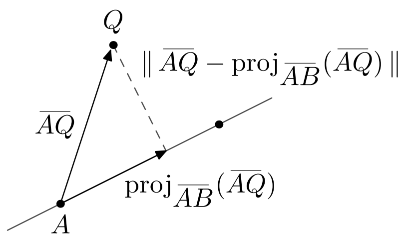


Kuva 13.32: Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora S.

Määritetään ensin vektori jostakin suoran pisteestä tutkittavaan pisteeseen. Esimerkiksi vektori

$$\overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA} = (2, 2, 4)$$

käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan suoran suuntainen vektori, kuten vaikkapa vektori $\overline{AB} = (2, 4, 2)$.



Kuva 13.33: Pisteen Q etäisyys suorasta S.

Vektorin $\overline{AQ}$ projektio suoralle S on

$$\mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ}) = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AB}}{\overline{AB} \cdot \overline{AB}} \overline{AB} = \frac{20}{24}(2, 4, 2) = \frac{5}{6}(2, 4, 2).$$

Erotus $\overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})$ on kohtisuorassa suoraa S vastaan. Lasketaan erotus:

$$\begin{aligned} \overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ}) &= (2, 2, 4) - \frac{5}{6}(2, 4, 2) = \frac{6}{6}(2, 2, 4) - \frac{5}{6}(2, 4, 2) \\ &= \frac{1}{6}(12 - 10, 12 - 20, 24 - 10) = \frac{1}{6}(2, -8, 14) \\ &= \frac{1}{3}(1, -4, 7) \end{aligned}$$

Koska $\overline{AQ} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})$ on kohtisuorassa suoraa S vastaan, antaa erotusvektorin pituus pisteen Q etäisyyden suorasta:

$$\|\overline{AQ} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})\| = \frac{1}{3}\|(1,-4,7)\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+16+49} = \frac{1}{3}\sqrt{66}.$$

Siten pisteen Q etäisyys suorasta S on $\frac{1}{3}\sqrt{66}$.

13.4 Ortogonaalinen ja ortonormaali kanta

Määritelmä 13.21. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuden W kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on *ortogonaalinen*, jos

$$\bar{w}_i \cdot \bar{w}_j = 0 \quad \text{kaikilla } i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}, \text{ missä } i \neq j.$$

Toisin sanoen kantavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on *ortonormaali*, jos se on ortogonaalinen ja lisäksi

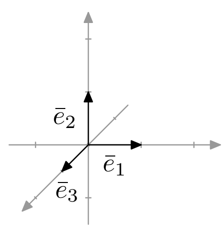
$$\|\bar{w}_i\| = 1 \quad \text{kaikilla } i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Toisin sanoen kantavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja niiden normi on yksi.

Esimerkki 13.22. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta $\mathcal{E}_n = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ on ortonormaali. Huomataan nimittäin, että

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0, \quad \text{jos } i \neq j.$$

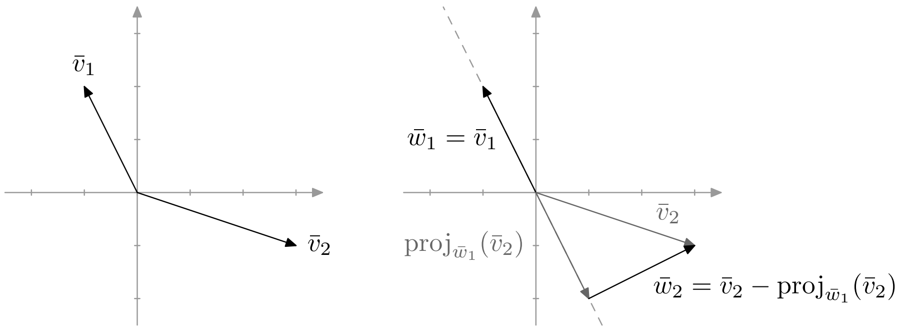
Lisäksi $\|\bar{e}_i\| = 1$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.



Kuva 13.34: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta $\mathcal{E}_3 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ on ortonormaali.

Ortogonaaliset kannat ovat monissa tilanteissa hyvin käyttökelpoisia. Mistä tahansa kannasta voidaan muodostaan ortogonaalinen kanta projektiota apuna käyttäen. Seuraavassa esimerkissä näytetään, miten tämä tapahtuu avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Asiaan palataan tarkemmin kurssin toisessa osassa.

Esimerkki 13.23. Merkitään $\bar{v}_1 = (-1, 2)$ ja $\bar{v}_2 = (3, -1)$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. (Tämän todistaminen jätetään lukijalle.)



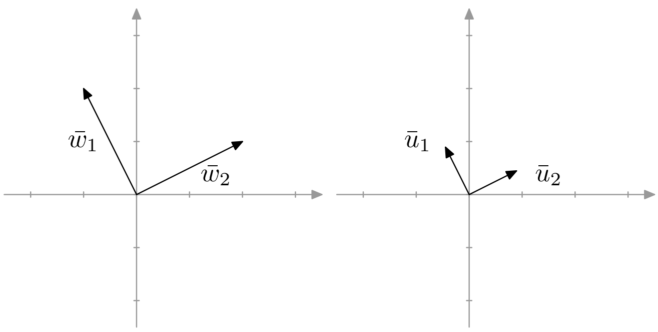
Kuva 13.35: Kannan $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ muuttaminen ortogonaaliseksi kannaksi $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$.

Etsitään ortogonaalinen kanta muodostamalla uusi jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ valitsemalla $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$ ja $\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2)$. Nyt vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat ortogonaaliset kuten luvussa 13.3 todettiin. Lisäksi $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, minkä todistaminen jätetään jälleen lukijalle.

Näin saadusta ortogonaalisesta kannasta voidaan vielä muodostaa ortonormaali kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ valitsemalla

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\|\bar{w}_1\|}\bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) \quad \text{ja} \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{\|\bar{w}_2\|}\bar{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

Jono $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaali kanta.



Kuva 13.36: Ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ja ortonormaali kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

Vektorin koordinaatit ortonormaalin kannan suhteen saadaan pistetulon avulla.

Lause 13.24. *Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ on aliavaruuden W ortonormaali kanta. Oletetaan, että $\bar{w} \in W$. Tällöin vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat $\bar{w} \cdot \bar{u}_1$, $\bar{w} \cdot \bar{u}_2, \ldots, \bar{w} \cdot \bar{u}_k$ eli*

$$\bar{w} = (\bar{w} \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{w} \cdot \bar{u}_2)\bar{u}_2 + \cdots + (\bar{w} \cdot \bar{u}_k)\bar{u}_k\,.$$

Todistus. Tutkitaan vektorin $\bar{w} \in W$ koordinaatteja kannan S suhteen. Olkoot koordinaatit $a_1, \dots, a_k$ eli $\bar{w} = a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{w} \cdot \bar{w}_1 &= (a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k) \cdot \bar{w}_1 \\ &= a_1(\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1) + a_2(\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_1) + \cdots + a_k(\bar{w}_k \cdot \bar{w}_1) \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 0 = a_1.\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että $\bar{w} \cdot \bar{w}_i = a_i$ kaikilla $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen saadaan siis laskemalla $\bar{w}$:n pistetulo kantavektorien kanssa. $\square$

Esimerkki 13.25. Määritetään vektorin $\bar{w} = (2, 9, -7)$ koordinaantit ortonormaalin kannan $\mathcal{E}_3 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ suhteen käyttäen edellä osoitettua tulosta. Koska

$$\begin{aligned}\bar{w} \cdot \bar{e}_1 &= (2, 9, -7) \cdot (1, 0, 0) = 2, \\ \bar{w} \cdot \bar{e}_2 &= (2, 9, -7) \cdot (0, 1, 0) = 9, \\ \bar{w} \cdot \bar{e}_3 &= (2, 9, -7) \cdot (0, 0, 1) = -7,\end{aligned}$$

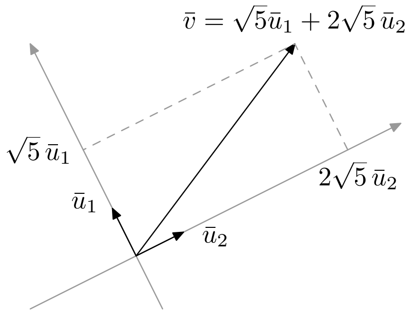
saadaan $\bar{w} = 2\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3$. (Tämän olisimme toki voineet päätellä suoraankin.)

Esimerkki 13.26. Tarkastellaan esimerkissä 13.22 muodostettua avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaalia kantaa $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, jossa

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2), \qquad \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

Vektorin $\bar{v} = (3, 4)$ koordinaatit tämän kannan suhteen ovat

$$\begin{aligned}\bar{v} \cdot \bar{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((3, 4) \cdot (-1, 2)\Big) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \\ \bar{v} \cdot \bar{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((3, 4) \cdot (2, 1)\Big) = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.\end{aligned}$$



Kuva 13.37: Vektorin $\bar{v}$ koordinaantit ortonormaalin kannan $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ suhteen.