# 11 Determinantti

Neliömatriisille voidaan laskea luku, joka kertoo muun muassa, onko matriisi kääntyvä vai ei. Tätä lukua kutsutaan matriisin determinantiksi. Determinantilla on muitakin sovelluksia, mutta tässä yhteydessä tarkastelemme vain sen yhteyttä matriisin kääntyvyyteen.

Determinantti voidaan määritellä monin eri tavoin. Tähän lukuun on valittu eräs melko yksinkertainen tapa. Kaikki luvussa esitellyt tulokset voitaisiin johtaa valitusta määritelmästä, mutta useimmat johdot olisivat niin työläitä, että niistä tyydytään antamaan vain perusidea. Käytettäessä hieman kehittyneempiä määritelmiä monet todistukset helpottuisivat huomattavasti, mutta itse määritelmän esittäminen veisi enemmän tilaa.

## 11.1 Pienten matriisien determinantit

Tarkastellaan ensin korkeintaan $3 \times 3$ -matriisien determinantteja. Determinantti voidaan laskea vain neliömatriisille.

**Määritelmä 11.1.**

a) Matriisin
$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$
*determinantti* on $\det(A) = a$.

b) Matriisin
$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
determinantti on $\det(B) = ad - bc$.

c) Matriisin
$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$
determinantti on $\det(C) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$.

Matriisin determinanttia voi merkitä myös pystyviivojen avulla:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix}, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \det(C) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

**Esimerkki 11.2.** Matriisin $A = [4]$ determinantti on $\det(A) = 4$. Matriisin

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti on puolestaan

$$\det(B) = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 4 + 2 = 6.$$

Edelleen matriisin

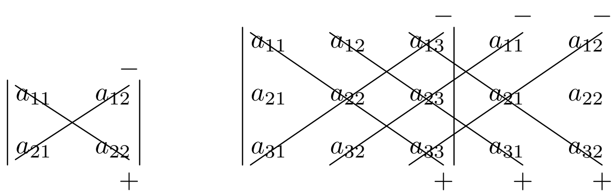
$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti on

$$\begin{aligned} \det(C) &= -2\big(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2\big) - 3\big(0 \cdot 4 - (-1) \cdot 1\big) + 2\big(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1\big) \\ &= -2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -17. \end{aligned}$$

Matriisille, jonka tyyppi on $2 \times 2$, voi käyttää determinantin laskemiseen kuvassa 11.23 esitettyä muistisääntöä. Piirretään matriisin poikki vinoviivat. Samalla viivalla olevat alkiot kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki ja muutoin miinusmerkki. Lopuksi tulot summataan.

Kuvassa 11.23 on esitetty laskemista helpottava muistisääntö myös suuremman, tyyppiä $3 \times 3$ olevan matriisin determinantille. Kirjoitetaan matriisin vierelle matriisin ensimmäinen ja toinen sarake. Piirretään kuvion päälle matriisin lävistäjän suuntaisia viivoja sekä vastakkaissuuntaisia viivoja. Samalla viivalla olevat alkiot kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki. Jos viiva on vastakkaissuuntainen, tulee tulon eteen miinusmerkki. Lopuksi tulot lasketaan yhteen.



Kuva 11.23: Muistisäännöt $2 \times 2$ -determinantin ja $3 \times 3$ -determinantin laskemiseksi.

Determinantin merkitys näkyy siinä, että se kertoo matriisin kääntyvyydestä. Lauseen 9.12 nojalla $2 \times 2$ -matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, jos ja vain jos $ad - bc \neq 0$. Toisaalta matriisin $A$ determinantti on $ad - bc$. Matriisi $A$ on siis kääntyvä, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$. Samanlainen tulos pätee myös $3 \times 3$ -matriisien determinanteille sekä myöhemmin määriteltäville suurempien matriisien determinanteille. Todistus on esitetty tämän luvun loppupuolella.

**Lause 11.3.** *Oletetaan, että $A$ on $n \times n$ -matriisi. Matriisi $A$ on kääntyvä, jos ja vain jos* $\det(A) \neq 0$.

**Esimerkki 11.4.** Tutkitaan, onko vektorijono $((2, 1, -1), (0, 1, -3), (-2, 1, -7))$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Kyseessä on kanta, mikäli jokainen vektori $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ voidaan ilmaista annettujen vektorien lineaarikombinaationa. Tutkittava yhtälöryhmä voidaan ilmaista matriisimuodossa $A\bar{x} = \bar{w}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos kerroinmatriisi $A$ on kääntyvä (lause 10.1). Toisaalta lauseen 11.3 nojalla $A$ on kääntyvä, jos ja vain jos sen determinantti on nollasta poikkeava. Lasketaan determinantti:

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} &= 2\big(1 \cdot (-5) - 1 \cdot (-3)\big) - 0 - 2\big(1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1)\big) \\ &= 2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2) = 0. \end{aligned}$$

Koska determinantti on 0, matriisi $A$ ei ole kääntyvä. Tästä syystä tutkittavan yhtälöryhmän ratkaisua ei ole olemassa tai se ei ole yksikäsitteinen. Annettu vektorijono ei siis muodosta kantaa.

## 11.2 Determinantin kehityskaavat

Suurempien matriisien determinantit voidaan laskea pienempien matriisien determinanttien avulla.

**Määritelmä 11.5.** Olkoon $A$ jokin $n \times n$ -matriisi. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Jos $n = 1$, niin $\det(A) = a_{11}$. Jos taas $n > 1$, niin

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}),$$

missä $A_{ij}$ on matriisi, joka on saatu matriisista $A$ poistamalla $i$:s rivi ja $j$:s sarake.

Yleisen determinantin määritelmä ei ole ristiriidassa aiempien determinantin määritelmien kanssa. Esimerkiksi $3 \times 3$ -matriisin determinantti on uuden määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).\end{aligned}$$

Määritelmässä olevat kertoimet $a_1 j$ otetaan matriisin ensimmäiseltä riviltä. Sanotaan, että determinantti on tällöin *kehitetty ensimmäisen rivin suhteen.* Yhtä hyvin voidaan käyttää muita rivejä tai jopa muita sarakkeita.

**Lause 11.6.** *Oletetaan, että $A$ on $n \times n$-matriisi. Merkitään $A(i,j) = a_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, \dots, n\}$*

*a) Olkoon $i \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

*missä $A_{ij}$ on matriisi, joka on saatu matriisista $A$ poistamalla $i$:s rivi ja $j$:s sarake. Kyseessä on kehitys rivin $i$ suhteen.*

*b) Olkoon $j \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

*missä $A_{ij}$ on matriisi, joka on saatu matriisista $A$ poistamalla $i$:s rivi ja $j$:s sarake. Kyseessä on kehitys sarakkeen $j$ suhteen.*

*Todistuksen idea.* Lause voidaan todistaa tarkastelemalla, millaiseen lausekkeeseen määritelmän kehityskaava lopulta johtaa. Lauseke koostuu tuloista

$$\pm a_{ik_1} a_{ik_2} \cdots a_{ik_n},$$

missä $k_1, \dots, k_n$ ovat sarakkeiden indeksit jossakin järjestyksessä. Esimerkiksi tyypin $3 \times 3$ matriisin determinantin laskeminen johtaa näillä merkinnöillä lausekkeeseen

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Kunkin termin etumerkki määräytyy siitä, onko sarakkeiden uusi järjestys alkuperäisen järjestyksen ns. parillinen vai pariton permutaatio. Tämän havainnon jälkeen on suoraviivaista tarkistaa, että jokainen kehityskaava johtaa itse asiassa täsmälleen samaan lausekkeeseen. $\square$

Toisinaan voi säästää vaivaa, jos valitsee viisaasti rivin tai sarakkeen, jonka suhteen determinantin kehittää. Lasketaan matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

determinantti kehittämällä se aluksi kolmannen rivin ja välivaiheessa kolmannen sarakkeen suhteen:

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \left( 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= -(0 + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2)) = -(0 - 3 - 1) = 4.
\end{aligned}$$

Kehityskaavojen etumerkkien vaihtelu (eli kaavoissa muotoa $(-1)^{i+j}$ oleva kerroin) saadaan shakkilautaa muistuttavasta kuviosta:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

Matriisin tilalle ajatellaan plus- ja miinusmerkeistä koostuva ruudukko, jonka vasemmassa yläkulmassa on plusmerkki. Jos matriisin alkion kohdalla on plusmerkki, tulee kehityskaavassa alkion eteen plusmerkki. Vastaavasti, jos alkion kohdalla on miinusmerkki, tulee kehityskaavaankin miinusmerkki. Kunkin alkion omaa etumerkkiä ei myöskään sovi unohtaa.

## 11.3 Determinantin ominaisuuksia

Tarkastellaan vielä, miten determinantti suhtautuu matriisien alkeisrivitoimitukseen sekä laskutoimituksiin. Seuraavan, alkeisrivitoimituksia koskevan lauseen todistuksen voi johtaa suoraan determinanttien kehityskaavoista.

**Lause 11.7.** *Oletetaan, että $A$ on neliömatriisi.*

1) *Jos matriisi $B$ saadaan matriisista $A$ vaihtamalla kaksi riviä keskenään, niin* $\det(B) = -\det(A)$.
2) *Jos matriisi $B$ saadaan matriisista $A$ kertomalla jokin rivi nollasta poikkeavalla reaaliluvulla $t$, niin* $\det(B) = t\det(A)$.
3) *Jos matriisi $B$ saadaan matriisista $A$ lisäämällä johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla $k$ kerrottuna, niin* $\det(B) = \det(A)$.

Lauseen 11.10 kohdasta a) seuraa, että determinantin sarakkeet käyttäytyvät täsmälleen samalla tavalla kuin sen rivit. Lauseesta 11.7 saadaan siis seuraavat muistisäännöt:

1) Jos matriisin kaksi riviä (tai saraketta) vaihtaa keskenään, determinantin etumerkki muuttuu:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

2) Jos matriisin rivillä (tai sarakkeessa) kaikilla alkioilla on yhteinen nollasta poikkeava tekijä, tuon yhteisen tekijän voi ottaa determinantin eteen kertoimeksi:
$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

3) Jos matriisin riviin (tai sarakkeeseen) lisätään jokin toinen rivi (tai sarake) vakiolla kerrottuna, matriisin determinantti ei muutu:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Lauseesta seuraa myös, että eräiden matriisien determinantti on helppo määrittää suoraan matriisista.

**Lause 11.8.** *Oletetaan, että $A$ on neliömatriisi. Tällöin*

1) *jos matriisissa $A$ on nollarivi (nollasarake), niin* $\det(A) = 0$
2) *jos matriisissa $A$ on kaksi samaa riviä (samaa saraketta), niin* $\det(A) = 0$
3) *jos $A$ on kolmiomatriisi eli kaikki lävistäjän alapuoliset tai yläpuoliset alkiot ovat nollia, niin matriisin $A$ determinantti on lävistäjäalkioiden tulo.*

*Todistus.* Osoitetaan vain rivejä koskevat väitteet. Sarakkeita koskevat väitteet voidaan todistaa samalla tavalla.

1) Kerrotaan matriisin nollarivi luvulla $-1$, jolloin matriisi ei muutu. Edeltävän lauseen mukaan $\det(A) = -1 \cdot \det(A)$, josta seuraa, että $\det(A) = 0$.

2) Vaihdetaan matriisin samanlaiset rivit keskenään, jolloin matriisi ei muutu. Edeltävän lauseen mukaan $\det(A) = -1 \cdot \det(A)$, joten $\det(A) = 0$.

3) Tulos nähdään suoraan kehittämällä matriisi rivi riviltä alkaen ylimmästä tai alimmasta, jolla on vain yksi nollasta poikkeava alkio. □

Edeltäviä lauseita voidaan käyttää hyväksi determinantin laskemisessa. Kun matriisi muutetaan porrasmatriisiksi alkeisrivitoimitusten avulla, determinantti muuttuu lauseessa 11.7 kuvatulla tavalla. Porrasmatriisin determinantti voidaan puolestaan määrittää lauseen 11.8 avulla.

**Esimerkki 11.9.** Lasketaan matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

determinantti muuntamalla se vaiheittain porrasmatriisiksi. Tarvittavat alkeisrivitoimitukset on esitetty alla:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-3R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & -1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Tuloksena on yläkolmiomatriisi, jonka determinantti on lävistäjäalkioiden tulo eli $-48$. Lauseen 11.7 alkeisrivitoimituksista ainoastaan viimeinen muutti matriisin determinanttia, ja se aiheutti vain etumerkin muutoksen. Siispä alkuperäisen matriisin determinantti oli 48.

Alkeisrivitoimituksia tarkastelemalla voidaan todistaa myös kääntyvän matriisin determinanttiin liittyvä lause.

*Lauseen 11.3 todistus.* Neliömatriisi $A$ on kääntyvä täsmälleen silloin, kun se voidaan muuttaa alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, muuten porrasmatriisiin tulee nollarivi. Ykkösmatriisin determinantti on 1 ja nollarivin omaavan matriisin 0.

Toisaalta jokainen alkeisrivitoimitus säilyttää determinantin nollana tai nollasta poikkeavana sen mukaan, mitä se oli alun perin. Täten matriisi $A$ on kääntyvä täsmälleen silloin, kun sen determinantti on nollasta poikkeava. □

Tarkastellaan vielä matriisien laskutoimituksien vaikutusta determinanttiin.

**Lause 11.10.** *Oletetaan, että $A$ ja $B$ ovat neliömatriiseja. Tällöin*

*a)* $\det(A^\top) = \det(A)$

*b)* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

*Todistuksen idea.*

a) Tulos seuraa siitä, että determinantit voidaan kehittää yhtä hyvin sarakkeiden kuin rivienkin suhteen.

b) Jos jompikumpi tai molemmat matriiseista $A$ ja $B$ eivät ole kääntyviä, voidaan osoittaa, että myöskään niiden tulo ei ole kääntyvä. Tällöin väite pätee lauseen 11.3 perusteella. Oletetaan sitten, että $A$ ja $B$ ovat kääntyviä ja kirjoitetaan ne alkeismatriisien tuloina:

$$A = E_1 \cdots E_r \quad \text{ja} \quad B = F_1 \cdots F_s.$$

Lauseesta 11.7 seuraa, että jos $E$ on alkeismatriisi, jokaiselle neliömatriisille $M$ pätee

$$\det(EM) = \det(E)\det(M).$$

Käyttämällä tätä havaintoa toistuvasti yllä esitettyihin tuloihin, nähdään, että

$$\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_r) \quad \text{ja} \quad \det(B) = \det(F_1) \cdots \det(F_s).$$

Toisaalta samalla tavoin

$$\det(AB) = \det(E_1) \cdots \det(E_r) \cdot \det(F_1) \cdots \det(F_s),$$

joten väite seuraa. □

**Lause 11.11.** *Oletetaan, että neliömatriisi $A$ on kääntyvä. Tällöin*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

*Todistus.* Oletuksen mukaan matriisi $A$ on kääntyvä, joten sillä on käänteismatriisi $A^{-1}$. Edellisen lauseen b)-kohdan nojalla pätee

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$$

Toisaalta lauseen 11.3 mukaan $\det(A) \neq 0$, sillä $A$ on kääntyvä. Jakamalla puolittain saadaan $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. □