10 Matriisit ja yhtälöryhmät

Tässä luvussa esitellään uusi tapa kirjoittaa lineaarinen yhtälöryhmä matriisien avulla käyttäen hyväksi matriisikertolaskua sekä sarakevektoreita. Pilkotaan sitä varten yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{8}$$

eri osat omiksi matriiseikseen. Ensinnäkin yhtälöryhmän (8) *kerroinmatriisiksi* kutsutaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kerroinmatriisi sisältää siis yhtälöryhmän kertoimet järjestyksessä. Kerätään vielä muuttujat ja vakiot omiksi matriiseikseen:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Kaikki tuntemattomat ovat sarakevektorissa $\bar{x}$ ja kaikki vakiot sarakevektorissa $\bar{b}$.

Nyt yhtälöryhmä (8) voidaan kirjoittaa matriisien avulla. Huomataan nimittäin, että

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Sarakevektorin $A\bar{x}$ alkiot vastaavat yhtälöryhmän (8) yhtälöiden vasempia puolia. Koska sarakevektori $\bar{b}$ sisältää yhtälöiden oikeat puolet samassa järjestyksessä, yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa muodossa $A\bar{x} = \bar{b}$ eli

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Kerroinmatriisin kääntyvyys vaikuttaa nyt merkittävästi yhtälöryhmän ratkaisuihin.

Lause 10.1. *Jos matriisi A on kääntyvä, yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.*

Todistus. Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Todistuksessa on kaksi osaa. On osoitettava, että yhtälöllä on jokin ratkaisu ja että ratkaisuja ei ole enempää kuin yksi.

Osoitetaan ensin, että yhtälölle löytyy jokin ratkaisu. Koska A on kääntyvä, on olemassa käänteismatriisi A^{-1}. Nähdään, että $A^{-1}\bar{b}$ on yhtälön ratkaisu, sillä

$$A(A^{-1}\bar{b}) = (AA^{-1})\bar{b} = I\bar{b} = \bar{b}.$$

Osoitetaan sitten, ettei muita ratkaisuja ole. Oletetaan, että $\bar{y}$ on jokin (toinen) ratkaisu. Tällöin $A\bar{y} = \bar{b}$. Kerrotaan yhtälön molemmat puolet matriisilla A^{-1}, jolloin saadaan

$$A^{-1}A\bar{y} = A^{-1}\bar{b}$$

ja edelleen $\bar{y} = A^{-1}\bar{b}$. Kysymyksessä onkin sama ratkaisu, joka löydettiin jo aikaisemmin. Siten ratkaisuja on vain yksi ja se on $A^{-1}\bar{b}$. □

10.1 Alkeismatriisit

Myös alkeisrivitoimitukset voi ilmaista matriisikertolaskun avulla. Osoittautuu, että jos matriisia kerrotaan niin kutsutulla alkeismatriisilla, tullaan matriisille tehneeksi alkeisrivitoimitus. Tästä tulee olemaan hyötyä kääntyvien matriisien käsittelyssä.

Määritelmä 10.2. Matriisi on *alkeismatriisi*, jos se on saatu ykkösmatriisista yhdellä alkeisrivitoimituksella.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat alkeismatriiseja:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nämä alkeismatriisit on saatu ykkösmatriisista tekemällä sille alkeisrivitoimitukset $-\frac{1}{2}R_3$, $R_2 \leftrightarrow R_4$ ja $R_3 + 3R_1$.

Esimerkki 10.3. Osoittautuu, että alkeismatriiseilla kertominen vastaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Tutkitaan tätä edellisen esimerkin alkeismatriisien ja matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

avulla. Laskemalla nähdään, että

$$E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -\mathbf{\frac{1}{2}}a_{31} & -\mathbf{\frac{1}{2}}a_{32} & -\mathbf{\frac{1}{2}}a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$

$$E_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \end{bmatrix}$$

ja

$$E_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{3a_{11}} + a_{31} & \boldsymbol{3a_{12}} + a_{32} & \boldsymbol{3a_{13}} + a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että jokaisella alkeismatriisilla kerrottaessa matriisille A tullaan tehneeksi sama alkeisrivioperaatio, jonka avulla alkeismatriisi muodostettiin.

Yksittäinen esimerkki ei takaa, että alkeismatriisilla kertominen vastaa aina alkeisrivitoimituksen tekemistä. Esimerkin perusteella voi kuitenkin ymmärtää, miksi näin on. Väitteen todistaminen on melko työlästä, joten se jätetään väliin.

Lemma 10.4. *Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Olkoon E alkeismatriisi, joka saadaan tekemällä jokin alkeisrivitoimitus ykkösmatriisille I_n. Jos matriisille A tehdään sama alkeisrivitoimitus, tuloksena on matriisi EA.*

Huom. Lemma tarkoittaa apulausetta. Se on siis pieni tulos, jota voidaan käyttää hyväksi tärkeämpien lauseiden todistamisessa.

Lause 10.5. *Alkeismatriisit ovat kääntyviä, ja alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi.*

Todistus. Tarkkaa todistusta ei esitetä tässä. Käydään kuitenkin läpi todistuksen idea.

Jokainen alkeisrivitoimitus voidaan peruuttaa toisella alkeisrivitoimituksella kuten kohta nähdään. Kutsutaan tätä alkeisrivitoimitusta alkuperäisen alkeisrivitoimituksen *käänteistoimitukseksi*.

Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Jos matriisille tehdään alkeisrivitoimitus $R_i \leftrightarrow R_j$, päästään takaisin alkutilanteeseen tekemällä sama alkeisrivitoimitus uudelleen. Alkeisrivitoimitus $R_i \leftrightarrow R_j$ on siis itsensä käänteistoimitus. Alkeisrivitoimituksen aR_i käänteistoimitus on puolestaan $\frac{1}{a}R_i$, ja alkeisrivitoimituksen $R_i + bR_j$ käänteistoimitus on $R_i - bR_j$.

Alkeismatriisin käänteismatriisi saadaan aina käänteistoimitusta vastaavasta alkeismatriisista. Alkeisrivitoimitusta $R_i \leftrightarrow R_j$ vastaava alkeismatriisi on oma käänteismatriisinsa, alkeisrivitoimitusta aR_i vastaavan alkeismatriisin käänteismatriisi on alkeisrivitoimitusta $\frac{1}{a}R_i$ vastaava alkeismatriisi ja niin edelleen. Alkeisrivitoimituksen tekeminen vastaa nimittäin edellisen lemman nojalla alkeismatriisilla kertomista. Esimerkiksi alkeisrivitoimitukset aR_i ja $\frac{1}{a}R_i$ peräkkäin suoritettuina eivät tee matriisille mitään. Siten niitä vastaavien alkeismatriisien tulo on ykkösmatriisi, jolla kertominen ei tee matriisille mitään. □

Esimerkki 10.6. Etsitään alkeismatriisin

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Matriisi vastaa alkeisrivitoimitusta $R_3 + 3R_1$. Tämän alkeisrivitoimituksen voi kumota tekemällä alkeisrivitoimituksen $R_3 - 3R_1$. Sitä vastaava alkeismatriisi on

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voi vielä varmistaa, että $EF = I$ ja $FE = I$. Siis $E^{-1} = F$.

Lauseessa 10.1 todettiin jo kääntyvien matriisien merkitys yhtälöryhmän ratkaisun kannalta. Nyt tuota tulosta voidaan täydentää tarkastelemalla lisäksi alkeisrivioperaatioita ja niitä vastaavia alkeismatriiseja.

Lause 10.7. *Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

a) Matriisi A on kääntyvä.

b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

Todistus. Osoitetaan väite todistamalla seuraava päättelyketju:

$$\text{a)} \Rightarrow \text{b)} \Rightarrow \text{c)} \Rightarrow \text{d)} \Rightarrow \text{e)} \Rightarrow \text{a)}.$$

Tämän jälkeen tiedetään, että jokainen lauseen kohta on yhtäpitävä toisten kohtien kanssa.

a) $\Rightarrow$ b): Väite on osoitettu lauseessa 10.1.

b) $\Rightarrow$ c): Oletetaan, että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Tämä pätee myös, jos $\bar{b} = \bar{0}$. Toisaalta yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on aina ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Siten $\bar{x} = \bar{0}$ on ainoa ratkaisu.

c) $\Rightarrow$ d): Oletetaan, että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Merkitään $A(i,j) = a_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Yhtälöä $A\bar{x} = \bar{0}$ vastaava lineaarinen yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu ja muuttujia on yhtä monta kuin yhtälöitä, täytyy yhtälöryhmän olla ekvivalentti yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

kanssa. Tämä tarkoittaa, että matriisi A saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua ykkösmatriisiksi. Toisin sanottuna A on riviekvivalentti matriisin I kanssa.

d) $\Rightarrow$ e): Oletetaan, että matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa. Olkoot $E_1, \ldots, E_k$ ne alkeismatriisit, joilla kertomalla matriisista A saadaan redusoitu porrasmatriisi. Nyt siis pätee

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

Kun yhtälön molemmat puolet kerrotaan vasemmalta matriisilla E_k^{-1}, saadaan $E_{k-1} \cdots E_1 A = E_k^{-1}$. Kun tämän yhtälön vasemmat puolet kerrotaan matriisilla E_{k-1}^{-1}, saadaan $E_{k-2} \cdots E_1 A = E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$. Jatkamalla samaan tapaan päädytään yhtälöön

$$A = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}.$$

Koska alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi, on väite todistettu.

e) $\Rightarrow$ a): Oletetaan, että $A = E_1 \cdots E_k$, missä $E_1, \ldots, E_k$ ovat alkeismatriiseja. Merkitään

$$B = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} AB &= (E_1 \cdots E_k)(E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}) \\ &= E_1 \cdots (E_k E_k^{-1}) \cdots E_1^{-1} \\ &= E_1 \cdots E_{k-1} I E_{k-1}^{-1} \cdots E_1^{-1} \\ &\ \ \vdots \\ &= E_1 E_1^{-1} = I. \end{aligned}$$

Samalla tavalla nähdään, että $BA = I$. Siten B on matriisin A käänteismatriisi.

$\square$

10.2 Käänteismatriisin määrittäminen

Muuttamalla neliömatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi voidaan nähdä, onko matriisi kääntyvä. Jos nimittäin matriisi A onnistutaan muuttamaan alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, niin A on lauseen 10.7 nojalla kääntyvä eli sillä on käänteismatriisi A^{-1}. Muussa tapauksessa A ei ole kääntyvä.

Jos matriisi on kääntyvä, käytetyistä alkeisrivitoimituksista saadaan myös selville, mikä käänteismatriisi on. Oletetaan, että matriisi A on muutettu ykkösmatriisiksi alkeisrivitoimituksilla, joita vastaavat alkeismatriisit $E_1, \ldots, E_k$. Nyt

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

Tällöin käänteismatriisille pätee

$$\begin{aligned} A^{-1} = IA^{-1} &= (E_k \cdots E_1 A)A^{-1} = E_k \cdots E_1 (AA^{-1}) \\ &= E_k \cdots E_1 I. \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että tekemällä ykkösmatriisille I samat alkeisrivitoimitukset kuin tehtiin alunperin matriisille A päädytään käänteismatriisiin A^{-1}.

Matriisin A kääntyvyyden selvittäminen ja käänteismatriisin etsiminen voidaan tehdä yhtä aikaa. Yhdistetään matriisit A ja I matriisiksi $[A \mid I\,]$. Tehdään tälle matriisille alkeisrivitoimituksia, joilla A muutetaan redusoiduksi porrasmatriisiksi. Jos matriisi A saadaan muutettua alkeisrivitoimitusten avulla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Kuten edellä todettiin, samat alkeisrivitoimitukset muuttavat ykkösmatriisin I matriisin A käänteismatriisiksi A^{-1}. Siis

$$[A \mid I] \quad \rightsquigarrow \quad [I \mid A^{-1}].$$

Esimerkki 10.8. Tutkitaan, onko matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Muokataan yhdistettyä matriisia

$$\left[\begin{array}{ccr|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

alkeisrivitoimituksilla samaan tapaan kuin Gaussin-Jordanin menetelmässä. Tavoitteena on saada vasemmalle puolelle ykkösmatriisi. Muokkaus voi tapahtua esimerkiksi seuraavasti:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_3 - 2R_1}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\\
0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_2 + \frac{5}{2}R_3}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_1 - 4R_3}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1\\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right].
$$

Koska matriisi A saatiin muutettua alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Lisäksi sen käänteismatriisi on

$$
\begin{bmatrix}
0 & -4 & 1\\
\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\
0 & 1 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Entä jos matriisi ei ole kääntyvä? Kuinka voidaan osoittaa, että matriisista ei saada alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisia? On itse asiassa niin, että jos alkeisrivitoimitusten avulla saadaan aikaan nollarivi, ei matriisi voi olla riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa. (Todistus perustuisi redusoidun porrasmatriisin yksikäsitteisyyteen.) Nollarivi on siis merkki siitä, ettei matriisi ei ole kääntyvä.

Esimerkki 10.9. Tutkitaan, onko matriisilla

$$
B = \begin{bmatrix}
2 & 1 & -3\\
-1 & 0 & 2\\
1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
$$

käänteismatriisi. Ryhdytään muokkaamaan yhdistettyä matriisia alkeisrivitoimituksilla:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
-1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\
4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0\\
3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{(-1)R_1}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0\\
4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0\\
3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_2 - 4R_1}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0\\
3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_3 - 3R_1}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0\\
0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_3 - R_2}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1
\end{array}\right].
$$

Koska matriisin B viimeisen rivin paikalle tuli nollarivi, matriisista B ei saada alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisia. Siten B ei ole kääntyvä.