1 Avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektorit

Koulussa tason ja kolmiulotteisen avaruuden vektoreita käsiteltiin yleensä komponenttimuodossa. Eräs tason vektori saattoi olla vaikkapa $\bar{v} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$. Huomattiin, että jokaisella koordinaatiston pisteellä on paikkavektori, jonka komponentit ovat pisteen koordinaatit. Esimerkiksi pisteen $(3, -2)$ paikkavektori olisi edellä mainittu vektori $\bar{v}$.

Kun vektorin käsitettä yleistetään korkeampiin ulottuvuuksiin, osoittautuu helpommaksi käsitellä vektoreita ja avaruuden pisteitä samalla tavalla. Esimerkiksi merkintä $(3, -2)$ tulee tarkoittamaan sekä pistettä $(3, -2)$ että yllä määriteltyä vektoria $\bar{v}$. Tällöin voidaan myös luopua hieman kömpelöstä yksikkövektoreiden $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ käytöstä.

Tässä luvussa käsitellään tason ja kolmiulotteisen avaruuden vektoreita. Näitä avaruuksia kutsutaan nimillä $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$.

1.1 Kaksiulotteisen avaruuden vektorit

Määritelmä 1.1. Avaruus $\mathbb{R}^2$ koostuu reaalilukupareista. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ ja } b \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ alkioita kutsutaan *vektoreiksi*.

Huom. 1. Määritelmä tarkoittaa sopimusta. Tässä siis sovitaan, mitä avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreilla tarkoitetaan. Määritelmää ei tarvitse perustella millään tavalla.

Huom. 2. Tarkalleen ottaen vektori (a, b) on niin kutsuttu *järjestetty pari*. Tämä tarkoittaa sitä, että lukujen a ja b järjestyksellä on väliä. Esimerkiksi järjestetty pari $(1, 2)$ ei ole sama kuin järjestetty pari $(2, 1)$.

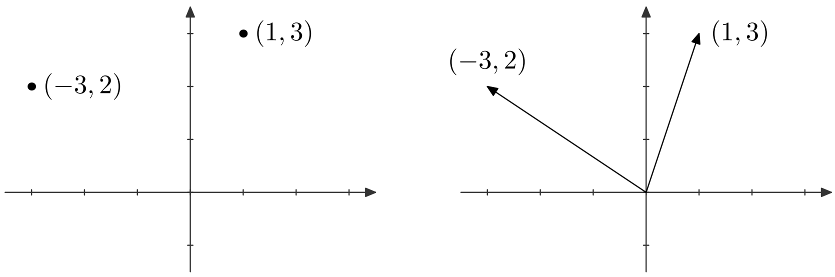
Huom. 3. Jos joukko-opin merkinnät (esim. $\in$, $\subset$, $\setminus$) eivät ole tuttuja, voit katsoa apua kurssisivulla olevasta tiedostosta "Joukko-opin merkintöjä".

Vektoreita merkitään tässä tekstissä yleensä kirjaimella, jonka päällä on viiva. Voidaan esimerkiksi kirjoittaa $\bar{v} = (a, b)$. Luvut a ja b ovat tällöin vektorin $\bar{v}$ *komponentteja*. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreissa on aina kaksi komponenttia, ja avaruutta $\mathbb{R}^2$ kutsutaan *kaksiulotteiseksi*.

Esimerkki 1.2. Esimerkiksi $\bar{v} = (4, -1)$ ja $\bar{u} = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{5}\right)$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita. Vektorin $\bar{v}$ komponentit ovat 4 ja -1. Vektorin $\bar{u}$ komponentit ovat puolestaan $\frac{1}{2}$ ja $-\sqrt{5}$.

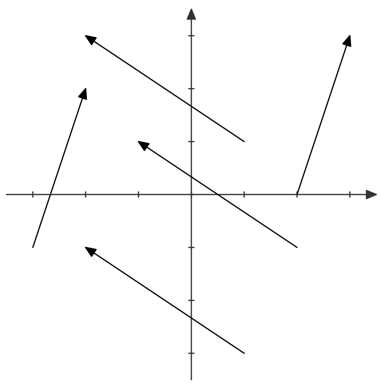
Kaksiulotteisen avaruuden vektoreita voidaan havainnollistaa eri tavoin. Eräs tapa on ajatella vektorit koordinaatiston pisteinä. Vektoria (a, b) vastaa piste, jonka vaakakoordinaatti on a ja pystykoordinaatti b. Kuvassa 1.1 on esitetty vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat tason pisteet.

Vektoria (a, b) voi kuvata myös pisteen (a, b) paikkavektorina eli suuntajanana, jonka lähtöpiste on origo ja päätepiste (a, b). Vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat paikkavektorit on myös esitetty kuvassa 1.1.



Kuva 1.1: Tason pisteet, jotka vastaavat vektoreita $(1,3)$ ja $(-3,2)$, sekä samoja vektoreita vastaavat paikkavektorit.

Pisteen ja paikkavektorin lisäksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoria voi havainnollistaa mistä tahansa pisteestä lähtevällä suuntajanana. Suuntajanan paikalla ei ole väliä. Ainoastaan sen suunta ja pituus merkitsevät. Vektoria (a,b) vastaavalla suuntajanalla on sama suunta ja pituus kuin pisteen (a,b) paikkavektorilla. Kuvassa 1.2 on esitetty vektoria $(1,3)$ vastaavia suuntajanoja sekä vektoria $(-3,2)$ vastaavia suuntajanoja.



Kuva 1.2: Vektoreita $(1,3)$ ja $(-3,2)$ vastaavia suuntajanoja.

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori on siis tällä kurssilla määritelmänsä mukaan kahdesta reaaliluvusta koostuva järjestetty pari. Vektoreita voidaan kuitenkin havainnollistaa pisteinä, paikkavektoreina tai suuntajanoina. Se, millainen havainnollistamistapa on paras, riippuu siitä, mitä ollaan tekemässä. Usein vektoreita käsiteltäessä on pystyttävä vaihtamaan sulavasti yhdestä esitystavasta toiseen.

Koulusta tutut tason yksikkövektorit ovat määritelmän mukaan $\bar{i} = (1,0)$ ja $\bar{j} = (0,1)$. Kyseisiä merkintöjä ei juurikaan käytetä tällä kurssilla.

1.2 Vektorien laskutoimitukset

Vektoreille voidaan määritellä erilaisia laskutoimituksia. Yhteenlasku tapahtuu lisäämällä kummankin yhteenlaskettavan vektorin komponentit yhteen.

Määritelmä 1.3. Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *summa* on vektori

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

Lisäksi vektoreita voidaan kertoa reaaliluvuilla. Tätä operaatiota kutsutaan *skalaarikertolaskuksi.*

Määritelmä 1.4. Jos $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$, määritellään

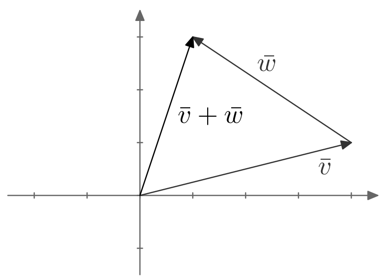
$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2).$$

Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan usein *skalaareiksi*, ja siitä johtuu myös skalaarikertolaskun nimitys.

Esimerkki 1.5. Tarkastellaan vektoreita $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Niiden summa on

$$\bar{v} + \bar{w} = (4 + (-3), 1 + 2) = (1, 3).$$

Yhteenlaskua voidaan havainnollistaa geometrisesti (ks. kuva 1.3). Vektorien summa nähdään asettamalla vektoreita vastaavat suuntajanat peräkkäin niin, että jälkimmäinen vektori alkaa siitä, mihin ensimmäinen päättyi. Summavektorin alkupiste on ensimmäisen vektorin alkupiste ja päätepiste jälkimmäisen vektorin päätepiste.



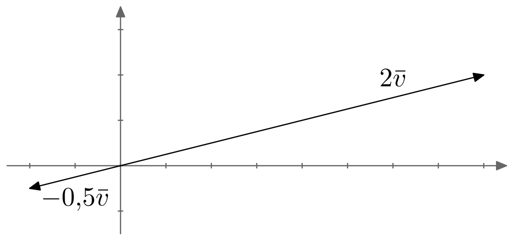
Kuva 1.3: Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ sekä niiden summa $\bar{v} + \bar{w}$.

Tutkitaan sitten skalaarikertolaskua. Määritelmän mukaan

$$2\bar{v} = (2 \cdot 4, 2 \cdot 1) = (8, 2)$$
$$\text{ja} \quad -\frac{1}{2}\bar{v} = \left(-\frac{1}{2} \cdot 4, -\frac{1}{2} \cdot 1\right) = \left(-2, -\frac{1}{2}\right).$$

Vektorit $2\bar{v}$ ja $-\frac{1}{2}\bar{v}$ on piirretty kuvaan 1.4. Huomataan, että skalaarilla kertominen venyttää vektoria vastaavan suuntajanan pituutta, mutta säilyttää sen suunnan, kuitenkin niin, että negatiivisella skalaarilla kertominen kääntää suunnan vastakkaiseksi.

Määritelmä 1.6. Vektorille $(-1)\bar{v}$ käytetään merkintää $-\bar{v}$. Summalle $\bar{v} + (-\bar{w})$ puolestaan käytetään merkintää $\bar{v} - \bar{w}$. Tätä kutsutaan vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotukseksi.*

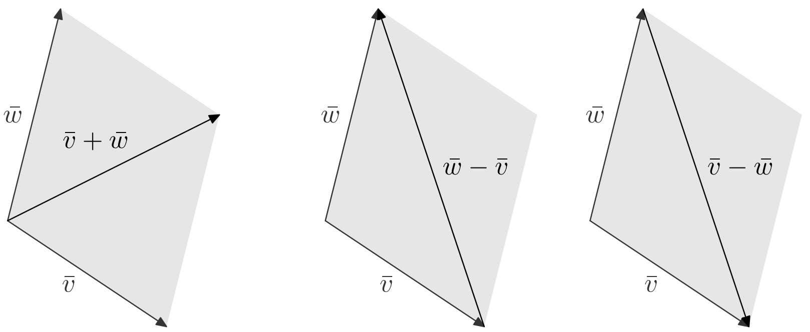


Kuva 1.4: Skalaarimonikerrat $2\bar{v}$ ja $-\frac{1}{2}\bar{v}$.

Esimerkiksi vektorien $(-1, 6)$ ja $(4, 2)$ erotus on

$$(-1, 6) - (4, 2) = (-1, 6) + (-1)(4, 2) = (-1, 6) + (-4, -2) = (-5, 4).$$

Vektorien erotuksen voi määrittää kuvan perusteella samaan tapaan kuin summan. Nyt vain jälkimmäisen vektorin suunta on käännettävä. Vektorien summaa ja erotusta on havainnollistettu kuvassa 1.5.



Kuva 1.5: Summa $\bar{v} + \bar{w}$ sekä erotukset $\bar{v} - \bar{w}$ ja $\bar{w} - \bar{v}$.

1.3 Kolmiulotteinen avaruus

Kaikki edellä esitellyt käsitteet voidaan määritellä myös kolmiulotteisessa avaruudessa. Avaruus $\mathbb{R}^3$ on joukko

$$\{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ alkioita nimitetään myös vektoreiksi. Niitä voidaan ajatella avaruuskoordinaatiston pisteinä, paikkavektoreina tai suuntajanoina. Yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään komponenteittain samalla tavalla kuin avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Kolmiulotteisen avaruuden yksikkövektorit ovat $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$ ja $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Näitäkään merkintöjä ei jatkossa tulla juuri tarvitsemaan.