Johdatus lineaarialgebraan

Lotta Oinonen ja Johanna Rämö

4. marraskuuta 2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
2012

Sisältö

Luku 1

Avaruus $\mathbb{R}^n$

1 Avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektorit

Tässä luvussa käsitellään avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Käsiteltävä asia on tuttua koulusta, mutta käytettävät merkinnät ja nimitykset saattavat olla uusia. Jos joukko-opin merkinnät (esim. $\in$, $\subset$, $\setminus$) eivät ole tuttuja, voit katsoa apua kurssisivulla olevasta tiedostosta ”Joukko-opin merkintöjä”.

Määritelmä 1.1. Avaruus $\mathbb{R}^2$ koostuu reaalilukupareista. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ ja } b \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ alkoita kutsutaan *vektoreiksi*.

Huom. Määritelmä tarkoittaa sopimusta. Tässä siis sovitaan, mitä avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreilla tarkoitetaan. Määritelmää ei tarvitse perustella millään tavalla.

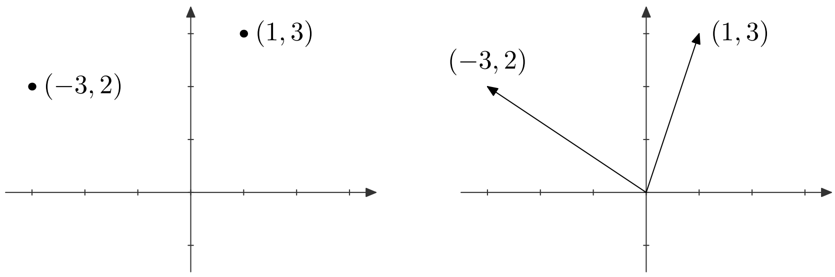
Vektoreita merkitään tässä tekstissä yleensä kirjaimella, jonka päällä on viiva. Voidaan esimerkiksi kirjoittaa $\bar{v} = (a, b)$. Luvut a ja b ovat vektorin $\bar{v}$ *komponentteja*.

Esimerkki 1.2. Esimerkiksi $\bar{v} = (4, -1)$ ja $\bar{u} = (\frac{1}{2}, -\sqrt{5})$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita. Vektorin $\bar{v}$ komponentit ovat 4 ja -1. Vektorin $\bar{u}$ komponentit ovat puolestaan $\frac{1}{2}$ ja $-\sqrt{5}$.

Tarkalleen ottaen vektori (a, b) on niin kutsuttu järjestetty pari. Tämä tarkoittaa sitä, että lukujen a ja b järjestyksellä on väliä. Esimerkiksi järjestetty pari $(1, 2)$ ei ole sama kuin järjestetty pari $(2, 1)$.

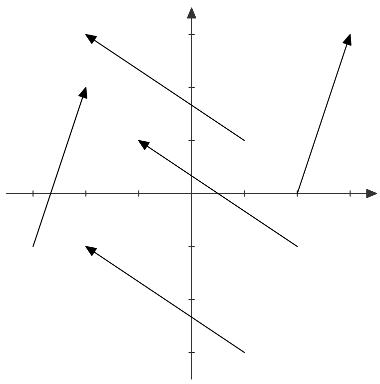
Vektoreita voidaan havainnollistaa koordinaatiston pisteinä. Vektoria (a, b) vastaa piste, jonka vaakakoordinaatti on a ja pystykoordinaatti b. Kuvassa 1.1 on esitetty vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat tason pisteet.

Vektoria (a, b) voi kuvata myös pisteen (a, b) paikkavektorina eli suuntajanana, jonka lähtöpiste on origo ja päätepiste (a, b). Vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat paikkavektorit on esitetty kuvassa 1.1.



Kuva 1.1: Vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat tason pisteet sekä samoja vektoreita vastaavat paikkavektorit.

Pisteen ja paikkavektorin lisäksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoria voi havainnollistaa mistä tahansa pisteestä lähtevällä suuntajanana. Kuvassa 1.2 on esitetty vektoria $(1, 3)$ vastaavia suuntajanoja sekä vektoria $(-3, 2)$ vastaavia suuntajanoja.



Kuva 1.2: Vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavia suuntajanoja.

Suuntajanan paikalla ei ole väliä. Ainoastaan sen suunta ja pituus merkitsevät. Vektoria (a, b) vastaavalla suuntajanalla on sama suunta ja pituus kuin pisteen (a, b) paikkavektorilla.

Tällä kurssilla avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori on määritelmänsä mukaan kahdesta reaaliluvusta koostuva järjestetty pari. Vektoreita voidaan kuitenkin havainnollistaa pisteinä, paikkavektoreina ja suuntajanoina. Se, millainen havainnollistamistapa on paras, riippuu siitä, mitä ollaan tekemässä. Usein vektoreita käsitellessä on pystyttävä vaihtamaan sulavasti yhdestä esitystavasta toiseen.

Vektoreille voidaan määritellä erilaisia laskutoimituksia.

Määritelmä 1.3. Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *summa* on vektori

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

Lisäksi vektoreita voidaa kertoa reaaliluvuilla. Tätä operaatiota kutsutaan *skalaarikertolaskuksi.* Jos $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin määritellään

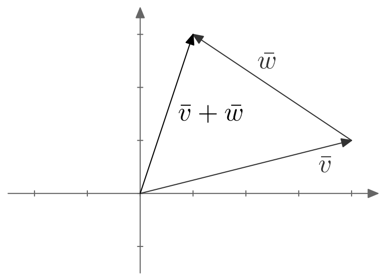
$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2).$$

Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan usein *skalaareiksi*, ja siitä johtuu myös skalaarikertolaskun nimitys.

Esimerkki 1.4. Tarkastellaan vektoreita $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Niiden summa on

$$\bar{v} + \bar{w} = (4 + (-3), 1 + 2) = (1, 3).$$

Yhteenlaskussa vektorien komponentit lasketaan yhteen, ja siksi yhteenlaskua voidaan havainnollistaa geometrisesti (ks. kuva 1.3). Vektorien summa nähdään asettamalla vektorit peräkkäin niin, että jälkimmäinen vektori alkaa siitä, mihin ensimmäinen päättyi. Summavektorin alkupiste on ensimmäisen vektorin alkupiste ja päätepiste jälkimmäisen vektorin päätepiste.



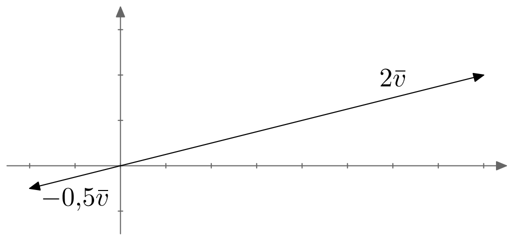
Kuva 1.3: Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ sekä niiden summa $\bar{v} + \bar{w}$.

Tutkitaan sitten skalaarikertolaskua. Määritelmän mukaan

$$2\bar{v} = (2 \cdot 4, 2 \cdot 1) = (8, 2) \quad \text{ja}$$
$$-\frac{1}{2}\bar{v} = (-\frac{1}{2} \cdot 4; -\frac{1}{2} \cdot 1) = (-2;\ -\frac{1}{2}).$$

Vektorit $2\bar{v}$ ja $-\frac{1}{2}\bar{v}$ on piirretty kuvaan 1.4.

Huomataan, että positiivisella skalaarilla kertominen säilyttää vektorin suunnan ja negatiivisella skalaarilla kertominen kääntää vektorin suunnan vastakkaiseksi.



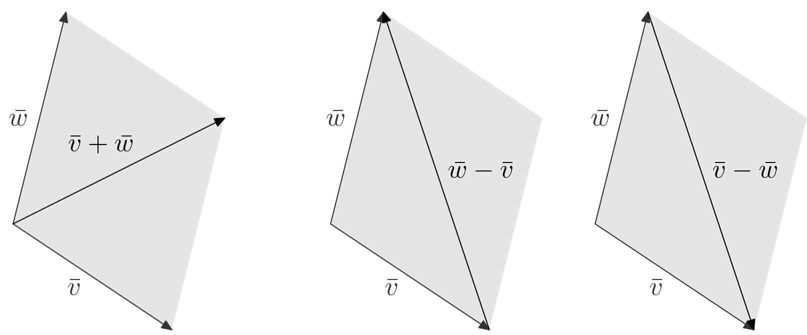
Kuva 1.4: Skalaarimonikerrat $2\bar{v}$ ja $-\frac{1}{2}\bar{v}$.

Määritelmä 1.5. Vektorille $(-1)\bar{v}$ käytetään merkintää $-\bar{v}$. Summalle $\bar{v} + (-\bar{w})$ puolestaan käytetään merkintää $\bar{v}-\bar{w}$. Tätä kutsutaan vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotukseksi.*

Esimerkiksi vektorien $(-1, 6)$ ja $(4, 2)$ erotus on

$$(-1, 6) - (4, 2) = (-1, 6) + (-1)(4, 2) = (-1, 6) + (-4, -2) = (-5, 4).$$

Vektorien erotuksen voi määrittää kuvan perusteella samaan tapaan kuin summan. Nyt vain jälkimmäisen vektorin suunta on käännettävä. Vektorien summaa ja erotusta on havainnollistettu kuvassa 1.5.



Kuva 1.5: Summa $\bar{v} + \bar{w}$ sekä erotukset $\bar{v} - \bar{w}$ ja $\bar{w} - \bar{v}$.

Kaikki edellä esitellyt käsitteet voidaan määritellä myös kolmiulotteisessa avaruudessa. Avaruus $\mathbb{R}^3$ on joukko $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Sen alkioita voidaan ajatella avaruuskoordinaatiston pisteinä. Yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään komponenteittain samalla tavalla kuin avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Toisinaan merkitään $\bar{i} = (1, 0)$ ja $\bar{j} = (0, 1)$ tai $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$ ja $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Kyseisiä merkintöjä ei juurikaan käytetä tällä kurssilla.

2 Avaruus $\mathbb{R}^n$

Edellisessä luvussa käsiteltiin avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektoreita eli reaalilukupareja ja reaalilukukolmikoita. Näitä avaruuksia voidaan yleistää määrittelemällä avaruus $\mathbb{R}^n$.

Oletetaan, että $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Määritelmä 2.1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiot ovat reaaliluvuista koostuvia n-jonoja. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita kutsutaan *vektoreiksi*.

Jos $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, niin lukuja $v_1, v_2, \dots, v_n$ kutsutaan vektorin $\bar{v}$ *komponenteiksi*. Sovimme, että ellei toisin mainita, vektorin $\bar{v}$ komponetteja merkitään symboleilla $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Määritelmä 2.2. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \quad \text{ja}$$

$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2, \dots, cv_n).$$

Ensimmäistä laskutoimitusta nimitetään vektorien *yhteenlaskuksi* ja toista *skalaarikertolaskuksi*. Jos $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$, vektoria $c\bar{v}$ nimitetään vektorin $\bar{v}$ *skalaarimonikerraksi*. Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan usein *skalaareiksi*.

Määritelmä 2.3. Vektorin $\bar{v}$ *vastavektori* on skalaarimonikerta $(-1)\bar{v}$. Sitä merkitään $-\bar{v}$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotus* on summa $\bar{v} + (-\bar{w})$. Sitä merkitään $\bar{v} - \bar{w}$. Vektoria $(0, 0, \dots, 0)$ kutsutaan *nollavektoriksi*. Sille käytetään merkitää $\bar{0}$.

Esimerkki 2.4. Merkitään $\bar{v} = (-5, 3, 0, 1, -1)$ ja $\bar{w} = (-2, -4, 2, 3, 5)$. Tällöin $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^5$ vektoreita. Lasketaan vektorit $2\bar{v} - 3\bar{w}$ ja $-5\bar{v} - \bar{w}$:

$$2\bar{v} - 3\bar{w} = (-10, 6, 0, 2, -2) - (-6, -12, 6, 9, 15) = (-4, 18, -6, -7, -17)$$
$$-5\bar{v} - \bar{w} = (25, -15, 0, -5, 5) - (-2, -4, 2, 3, 5) = (27, -11, -2, -8, 0).$$

Voidaan osoittaa, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille pätevät tutut laskusäännöt.

Lause 2.5. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja a, $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ *(vaihdannaisuus)*
2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ *(liitännäisyys)*
3. $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$
4. $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$
5. $c(\bar{v} + \bar{w}) = c\bar{v} + c\bar{w}$ *(osittelulaki)*

6. $(a + c)\bar{v} = a\bar{v} + c\bar{v}$ *(osittelulaki)*

7. $a(c\bar{v}) = (ac)\bar{v}$

8. $1\bar{v} = \bar{v}$

Huom. Lause tarkoittaa väitettä, joka voidaan perustella todeksi nojautumalla määritelmiin ja aikaisemmin todeksi osoitettuihin väitteisiin

Todistus. Todistetaan esimerkin vuoksi kohta 1 ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Kirjoitetaan $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, missä $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ ja $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$. Nyt nähdään, että

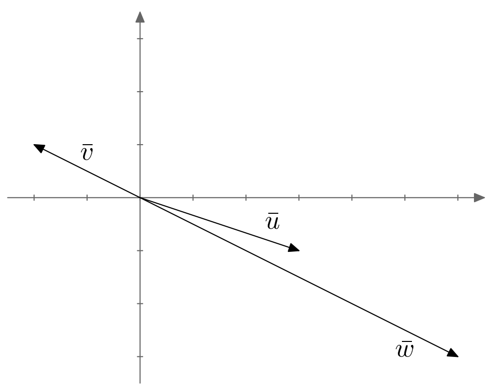
$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)\\ &= (w_1 + v_1, w_2 + v_2, \ldots, w_n + v_n) = \bar{w} + \bar{v}.\end{aligned}$$

Tässä käytettiin hyväksi reaalilukujen yhteenlaskun vaihdannaisuutta. Siten väite on todistettu. □

Skalaarikertolaskun avulla voidaan määritellä vektorien yhdensuuntaisuus.

Määritelmä 2.6. Vektorit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat *yhdensuuntaiset*, jos $\bar{v} = r\bar{w}$ jollakin $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin merkitään $\bar{v} \parallel \bar{w}$.

Esimerkki 2.7. Vektorit $\bar{v} = (-2, 1)$ ja $\bar{w} = (6, -3)$ ovat yhdensuuntaiset, sillä $\bar{v} = -(1/3)\bar{w}$. Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u} = (3, -1)$ eivät puolestaan ole yhdensuuntaiset. Jos nimittäin olisi olemassa $r \in \mathbb{R}$, jolle pätisi $\bar{v} = r\bar{u}$, niin $-2 = 3r$ ja $1 = -r$. Ensimmäisen yhtälön mukaan $r = -2/3$, mutta toisen yhtälön mukaan $r = -1$. Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua r, jolle pätee $\bar{v} = r\bar{u}$. Siten vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ eivät ole yhdensuutaiset.



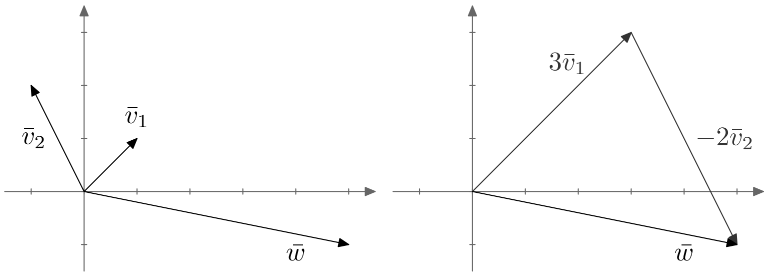
Kuva 2.6: Vektorit $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$.

Määritelmä 2.8. Oletetaan, että $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_k$ *lineaarikombinaatio*, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_k$, että

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k.$$

Esimerkki 2.9. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 2)$ ja $\bar{w} = (5, -1)$. Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatio, sillä

$$\begin{aligned} 3\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 &= 3(1, 1) - 2(-1, 2) = (3, 3) - (-2, 4) \\ &= (5, -1) = \bar{w}. \end{aligned}$$



Kuva 2.7: Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatio.

3 Suorat ja tasot

Tässä luvussa käsitellään avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ suoria ja tasoja vektoreiden näkökulmasta.

3.1 Suora

Määritelmä 3.1. Oletetaan, että $n = 2$ tai $n = 3$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *suora* on joukko

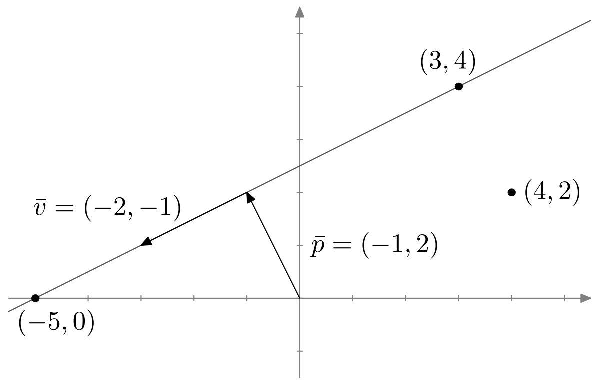
$$\{\bar{p} + k\bar{v} \mid k \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$.

Vektoria $\bar{p}$ kutsutaan suoran *paikkavektoriksi* ja vektoria $\bar{v}$ suoran *suuntavektoriksi.*

Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^2$ suora. Jos $(a, b) \in S$, niin sanotaan, että piste (a, b) on suoralla S tai että suora S kulkee pisteen (a, b) kautta. Vastaavia ilmauksia käytetään avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Esimerkki 3.2. Esimerkiksi joukko $S = \{(-1, 2) + k(-2, -1) \mid k \in \mathbb{R}\}$ on suora. Se on piirretty kuvaan 3.8.

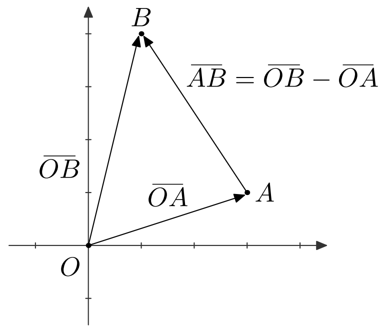


Kuva 3.8: Suora S avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Määritelmän mukaan mikä tahansa suoran S piste voidaan kirjoittaa summana vektorista $\bar{p} = (-1, 2)$ ja jostakin vektorin $\bar{v} = (-2, -1)$ skalaarimonikerrasta. Esimerkiksi $(-5, 0) = \bar{p} + 2\bar{v}$ ja $(3, 4) = \bar{p} - 2\bar{v}$, joten $(-5, 0) \in S$ ja $(3, 4) \in S$. Siis suora S kulkeen pisteiden $(-5, 0)$ ja $(3, 4)$ kautta.

Toisaalta piste $(4, 2)$ ei ole suoralla S. Jos nimittäin $(4, 2) = (-1, 2) + k(-2, -1)$ jollakin $k \in \mathbb{R}$, niin $4 = -1 - 2k$ ja $2 = 2 - k$. Ensimmäisen yhtälön perusteella $k = -5/2$ ja toisen perusteella $k = 0$. Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua $k \in \mathbb{R}$, jolle pätee $(4, 2) = (-1, 2) + k(-2, -1)$. Siis $(4, 2) \notin S$.

Ryhdytään seuraavaksi määrittämään suoraa, joka kulkee annettujen pisteiden kautta. Sitä ennen otetaan käyttöön muutama merkintä. Oletetaan, että A ja B ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ pisteitä. Vektori $\overline{AB}$ on vektori, jota vastaavan suuntajanan alkupiste on A ja päätepiste on B. Origoa on tapana merkitä symbolilla O. Siten pisteen A paikkavektorille saadaan merkintä $\overline{OA}$.

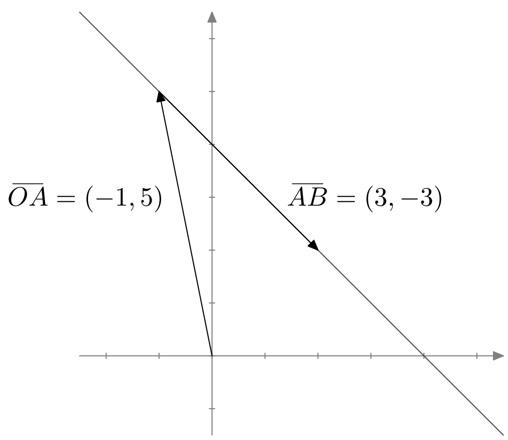


Kuva 3.9: Vektorit $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{AB}$.

Esimerkki 3.3. Tutkitaan, millainen on pisteiden $A = (-1, 5)$ ja $B = (2, 2)$ kautta kulkeva suora. Tätä varten tarvitaan suoralle paikkavektori. Paikkavektoriksi käy minkä tahansa suoran pisteen paikkavektori, esimerkiksi vektori $\overline{OA} = (-1, 5)$. Suuntavektoriksi käy mikä tahansa suoran suuntainen vektori, esimerkiksi vektori

$$\overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = (2, 2) - (-1, 5) = (3, -3).$$

Näin saadaan suora $\{(-1, 5) + t(3, -3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.



Kuva 3.10: Suora $\{(-1, 5) + t(3, -3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Varmistutaan vielä siitä, että annetut pisteet A ja B todellakin ovat suoralla. Huomataan, että $(-1,5) = (-1,5) + 0 \cdot (3,-3)$ ja $(2,2) = (-1,5) + (3,-3)$. Siten pisteet A ja B ovat suoralla.

Vastaavalla menetelmällä on aina mahdollista määrittää kahden pisteen kautta kulkeva suora, vaikka asiaa ei sen tarkemmin tässä osoitetakaan.

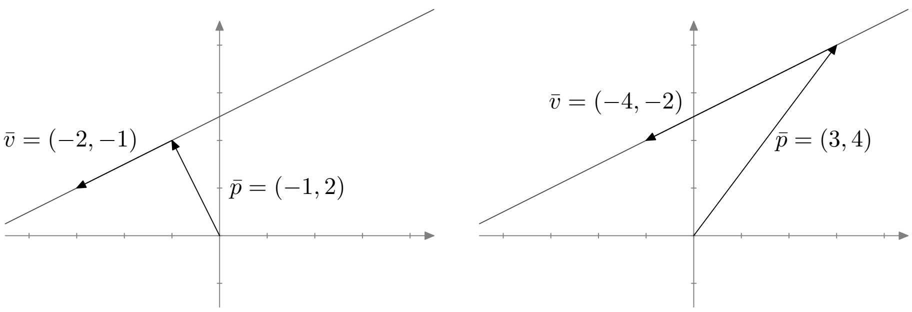
Suoran paikka- ja suuntavektorit eivät ole yksikäsitteisiä, sillä sama suora voidaan kirjoittaa joukkona $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ usealla eri tavalla. Voidaan osoittaa, että

- vektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita suoran minkä tahansa pisteen paikkavektori.
- vektoriksi $\bar{v}$ voidaan valita mikä tahansa suoran suuntainen vektori.

Esimerkki 3.4. Esimerkin 3.2 suoralle $S = \{(-1,2) + k(-2,-1) \mid k \in \mathbb{R}\}$ on mahdollista valita paikkavektoriksi piste $(3,4)$ ja suuntavektoriksi vektori $(-4,-2)$. Tällöin S voidaan kirjoittaa muodossa

$$\{(3,4) + t(-4,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Vaikka tämä joukko onkin äkkiseltään katsottuna erilainen kuin suoran S alkuperäinen määritelmä, on joukoissa täsmälleen samat alkiot. Asiaa on havainnollistettu kuvassa 3.11.



Kuva 3.11: Suoran paikkavektori ja suuntavektori eivät ole yksikäsitteisiä.

Osoitetaan vielä huolellisesti, että joukot $S = \{(-1,2) + k(-2,-1) \mid k \in \mathbb{R}\}$ ja $S' = \{(3,4) + t(-4,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ovat samat. Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.

"$\subset$": Osoitetaan ensin, että $S \subset S'$. Tämä tehdään näyttämällä, että jokainen joukon S alkio on joukossa S'. Oletetaan, että $\bar{a} \in S$. Nyt $\bar{a} = (-1,2) + k(-2,-1)$ jollakin $k \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (-1,2) + k(-2,-1) = (-1,2) + (-2+2+k)(-2,-1) \\ &= (-1,2) - 2 \cdot (-2,-1) + (2+k) \cdot (-2,-1) \\ &= (3,4) + (2+k) \cdot (-2,-1) = (3,4) + \frac{2+k}{2} \cdot (-4,-2),\end{aligned}$$

missä $(k+2)/2 \in \mathbb{R}$. Siten $\bar{a} \in S'$. Näin on osoitettu, että $S \subset S'$.

"$\supset$": Osoitetaan sitten, että $S' \subset S$ eli näytetään, että jokainen joukon S' alkio on joukossa S. Oletetaan, että $\bar{a} \in S'$. Nyt $\bar{a} = (3,4) + t(-4,-2)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (3,4) + t(-4,-2) = (3,4) + (-4,-2) + (t-1) \cdot (-4,-2) \\ &= (-1,2) + (t-1) \cdot (-4,-2) = (-1,2) + 2(t-1) \cdot (-2,-1), \end{aligned}$$

missä $2(t-1) \in \mathbb{R}$. Siten $\bar{a} \in S$. Näin on osoitettu, että $S' \subset S$.

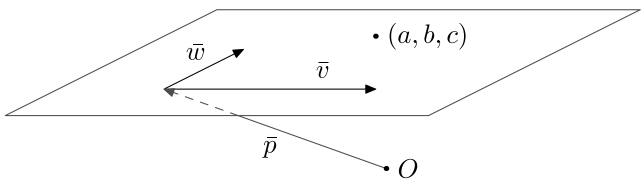
3.2 Taso

Määritelmä 3.5. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *taso* on joukko

$$\{\bar{p} + s\bar{v} + t\bar{w} \mid s,t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ ja vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

Vektoria $\bar{p}$ kutsutaan tason *paikkavektoriksi* ja vektoreita $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ tason *suuntavektoreiksi*. Olkoon T avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso. Jos $(a,b,c) \in T$, niin sanotaan, että piste (a,b,c) on tasossa T tai että taso T kulkee pisteen (a,b,c) kautta.



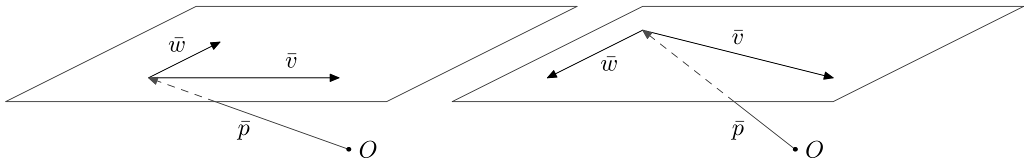
Kuva 3.12: Piste (a,b,c) on tasossa T.

Voidaan osoittaa, että sama taso on mahdollista kirjoittaa usealla eri tavalla joukkona $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s,t \in \mathbb{R}\}$:

- Vektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita tason minkä tahansa pisteen paikkavektori.
- Vektoreiksi $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ voidaan valita mitkä tahansa tason suuntaisen vektorit, kunhan $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

Esimerkki 3.6. Määritetään pisteiden $A = (0,1,0)$, $B = (-1,3,2)$ ja $C = (-2,0,1)$ kautta kulkeva taso T. Valitaan ensin tason paikkavektori. Esimerkiksi tason pisteen A paikkavektori $\overline{OA} = (0,1,0)$ käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan tason suuntaiset suuntavektorit:

$$\overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = (-1,2,2) \quad \text{ja} \quad \overline{AC} = -\overline{OA} + \overline{OC} = (-2,-1,1).$$



Kuva 3.13: Taso voidaan kirjoittaa eri tavoin joukkona $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Huomaa, että vektorit eivät ole yhdensuuntaiset, sillä $\overline{AB} \neq t\overline{AC}$ kaikilla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Näin saadaan taso

$$\begin{aligned} T &= \{\, \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} \mid s, t \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, (0,1,0) + s(-1,2,2) + t(-2,-1,1) \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}. \end{aligned}$$

4 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudet

Edellisessä luvussa käsittelimme avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ suoria ja tasoja. Osoittautuu, että erityisesti origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat mielenkiintoisia. Tässä luvussa yleistämme tällaiset suorat ja tasot avaruuteen $\mathbb{R}^n$ ja tutkimme niin kutsuttuja vektoreiden virittämiä aliavaruuksia.

Määritelmä 4.1. Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *virittämä aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Vektoreiden virittämä aliavaruus koostuu siis kaikista vektoreiden lineaarikombinaatioista. Englannin kielen verbi ”span” tarkoittaa virittämistä tai ulottumista.

Esimerkki 4.2. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ suora

$$S = \{\bar{0} + t(-3,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-3,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

on vektorin $(-3,1)$ virittämä aliavaruus. Toisin sanoen $S = \operatorname{span}\big((-3,1)\big)$. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso

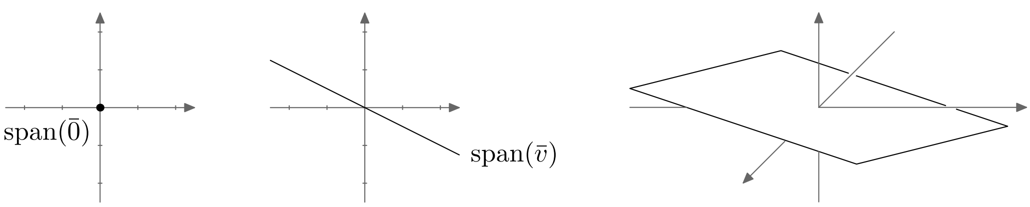
$$T = \{\bar{0} + t(-3,1) + s(2,2) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(-3,1) + s(2,2) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

taas on vektorien $(-3,1)$ ja $(2,2,)$ virittämä aliavaruus, eli $T = \operatorname{span}((-3,1),(2,2))$.

Tutkitaan millaisia vektorien virittämät aliavaruudet voivat olla avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$. Nollavektorin virittämä aliavaruus on $\operatorname{span}(\bar{0}) = \{a \cdot \bar{0} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\bar{0}\}$. Aliavaruudessa on siis ainoastaan nollavektori.

Oletetaan sitten, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ tai $\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}) = \{a\bar{v} \mid a \in \mathbb{R}\}$ on vektorin $\bar{v}$ suuntainen suora. Tämä suora kulkee origon kautta.

Jos taas $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaisia, vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}, \bar{w}) = \{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ on taso, joka kulkee origon kautta.



Kuva 4.14: Nollavektorin virittämä aliavaruus on $\{\bar{0}\}$. Vektorin $\bar{v} \neq \bar{0}$ virittämä aliavaruus on origon kautta kulkeva suora. Kahden vektorin virittämä aliavaruus voi olla origon kautta kulkeva taso.

Vektoreiden virittämän aliavaruus yleistää siis origon kautta kulkevan suoran ja tason käsitteitä. Seuraava esimerkki osoittaa, miksi juuri origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat erityisen kiinnostavia.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan origon kautta kulkevaa suoraa

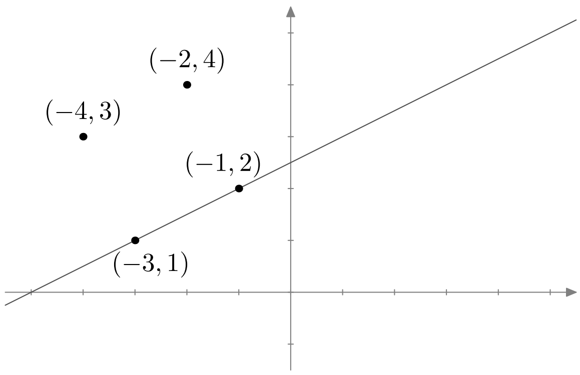
$$S = \operatorname{span}(\bar{v}) = \{k\bar{v} \mid k \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$. Jos $\bar{w}$, $\bar{u} \in S$, niin $\bar{w} = a\bar{v}$ ja $\bar{u} = b\bar{v}$ joillakin a, $b \in \mathbb{R}$. Nyt $\bar{w} + \bar{u} = (a+b)\bar{v}$, joten summa $\bar{w} + \bar{u}$ on suoran S alkio. Lisäksi jos $c \in \mathbb{R}$, niin $c\bar{w} = c(a\bar{v}) = (ca)\bar{v}$. Siten kaikkien suoran S alkioiden skalaarimonikerrat ovat edelleen suoran S alkioita. Tavallaan suora S on oma pieni avaruutensa avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisässä, ja siellä voidaan laskea vektoreita yhteen ja kertoa niitä reaaliluvuilla. Sama pätee origon kautta kulkeviin tasoihin.

Tilanne on aivan toinen, jos suora tai taso ei kulje origon kautta. Tutkitaan vaikkapa esimerkin 3.2 suoraa

$$S = \{(-1, 2) + k(-2, -1) \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt esimerkiksi $(-1, 2)$ ja $(-3, 1)$ ovat suoralla S. Summa $(-1, 2) + (-3, 1) = (-4, 3)$ ei kuitenkaan ole suoralla S (ks. kuva 4.15). Myöskään skalaarimonikerta $2 \cdot (-1, 2) = (-2, 4)$ ei ole suoralla S.



Kuva 4.15: Esimerkin 3.2 suora S.

Edellä tehdyt havainnot voidaan yleistää minkä tahansa vektoreiden virittämälle aliavaruudelle. Jos aliavaruuden kaksi vektoria lasketaan yhteen, on summa edelleen aliavaruudessa. Samoin aliavaruuden vektoreiden skalaarimonikerrat ovat aliavaruudessa. Lisäksi nollavektori kuuluu aina vektorien virittämään aliavaruuteen.

Lause 4.4. *Oletetaan, että* $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\ldots$, $\bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. *Merkitään* $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. *Tällöin* *a) jos $\bar{u}$, $\bar{w} \in W$, niin $\bar{u} + \bar{w} \in W$.*

b) jos $\bar{w} \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin $a\bar{w} \in W$.

c) $\bar{0} \in W$.

Todistus. Osoitetaan kohta a) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Oletetaan, että $\bar{u}$, $\bar{w} \in W$. Nyt $\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$ joillakin $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$ joillakin $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{w} &= (a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k) + (b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k) \\ &= (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k + b_k)\bar{v}_k. \end{aligned}$$

Siten $\bar{u} + \bar{w} \in W$. □

Esimerkki 4.5. Tutkitaan, kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. On siis selvitettävä, onko olemassa reaalilukuja x_1, x_2, x_3, joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}$$

eli

$$x_1(0, -1, 2, 1) + x_2(2, 0, 1, -1) + x_3(4, 2, 2, 0) = (-2, 3, 2, -1).$$

Tämä yhtälö voidaan vielä muuttaa muotoon

$$(0, -x_1, 2x_1, x_1) + (2x_2, 0, x_2, -x_2) + (4x_3, 2x_3, 2x_3, 0) = (-2, 3, 2, -1)$$

ja edelleen yhtälöksi

$$(0 + 2x_2 + 4x_3,\ -x_1 + 0 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2 + 0) = (-2, 3, 2, -1).$$

Toisin sanoen on ratkaistava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 +{}} 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3} = -1. \end{cases}$$

Miten tällainen yhtälöryhmä ratkaistaan? Ennen kuin syvennymme vektoreiden virittämiin aliavaruuksiin lisää, on syytä perehtyä yhtälöryhmien ratkaisemiseen.

5 Lineaariset yhtälöryhmät

Lineaarinen yhtälöryhmä on yhtälöryhmä, joka on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

missä $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Symbolit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat yhtälöiden tuntemattomia. Lukuja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi* ja lukuja $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *vakioiksi*. Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä symboleilla x, y, z ja niin edelleen.

Esimerkiksi

$$\begin{cases} -4x_1 & + & \sqrt{3}x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & + & \frac{6}{8}x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & \sqrt{2}x_2 & + & 11x_3 & = & -3 \\ & - & 6x_2 & - & 32x_3 & = & 4 \end{cases}$$

on lineaarinen yhtälöryhmä.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään kaikki ne luvut, jotka tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ paikalle sijoitettuina toteuttavat yhtä aikaa kaikki yhtälöt.

Lineaarisessa yhtälöryhmässä oleellisia ovat vain kertoimet ja vakiot. Kaikki tieto yhtälöryhmästä voidaankin tiivistää lukutaulukkoon eli *matriisiin*, jossa luetellaan kaikki kertoimet sekä vakiot. Kun käsitellään yhtälöryhmien sijasta matriiseja, on kirjoittevaa paljon vähemmän, sillä tuntemattomia ei tarvitse kirjata ylös.

Esimerkiksi edellä esitellyn yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & \sqrt{3} & 2 & 4 \\ 1 & 0 & \frac{6}{8} & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 11 & -3 \\ 0 & -6 & -32 & 4 \end{array}\right].$$

Selkeyden vuoksi kertoimet on tapana erottaa vakioista pystyviivalla. Huomaa, että matriisiin on kirjoitettava nolla niiden termien kohdalle, jotka puuttuvat yhtälöryhmästä. Kyseisten termien kertoimena on nimittäin nolla.

Kappaleessa 8 tutustutaan matriisien teoriaan yleisemmin. Tässä luvussa käsittelemme vain yhtälöryhmistä saatuja matriiseja.

5.1 Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä

Seuraavaksi käydään läpi menetelmä, jolla voidaan ratkaista mikä tahansa lineaarinen yhtälöryhmä. Ideana on muokata yhtälöryhmästä uusia yhtälöryhmiä, joilla on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä. Viimeisenä saatu yhtälöryhmä on helppo ratkaista. Koska viimeisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat samat kuin alkuperäisen yhtälöryhmän, on alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisut löydetty.

Määritelmä 5.1. Yhtälöryhmiä kutsutaan ekvivalenteiksi, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut.

Ryhdymme muokkaamaan yhtälöryhmiä niin kutsutuilla alkeisrivitoimituksilla. Niiden avulla tuotetaan uusia yhtälöryhmiä, jotka ovat ekvivalentteja alkuperäisen yhtälöryhmän kanssa. Koska matriisien käsitteleminen on helpompaa kuin yhtälöryhmien, tehdään alkeisrivitoimitukset matriiseille.

Määritelmä 5.2. Seuraavat kolme operaatiota ovat *alkeisrivitoimituksia*:

1. Vaihdetaan kahden rivin paikka matriisissa.
2. Kerrotaan jokin rivi nollasta poikkeavalla reaaliluvulla.
3. Lisätään johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla kerrottuna.

Alkeisrivitoimituksille käytetään tässä materiaalissa seuraavia lyhennysmerkintöjä

- $R_i \leftrightarrow R_j$: vaihdetaan rivien i ja j paikat $(i \neq j)$.
- aR_i: kerrotaan rivi i luvulla $a \neq 0$.
- $R_i + bR_j$: lisätään riviin i rivi j luvulla b kerrottuna $(i \neq j)$.

Esimerkki 5.3. Seuraavassa on annettu esimerkit erilaisista alkeisrivitoimituksista:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

Määritelmä 5.4. Matriisi A on *riviekvivalentti* matriisin B kanssa, jos B saadaan matriisista A alkeisrivitoimituksilla.

Esimerkiksi edellisen esimerkin matriisit

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \quad \text{ja} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

ovat riviekvivalentit. Alkeisrivitoimituksia voidaan ajatella tehtävän myös nolla kappaletta. Siten jokainen matriisi on itsensä kanssa riviekvivalentti.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ & & \vdots & & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underset{\text{toimituksia}}{\overset{\text{alkeisrivi-}}{\cdots}} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & | & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & | & d_2 \\ & & \vdots & & | & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & | & d_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \leftarrow \underset{\text{ratkaisut}}{\text{samat}} \rightarrow \begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

Kuva 5.16: Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmän perusta.

Lause 5.5. *Jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit.*

Lause voidaan muotoilla myös toisin: jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalenit, yhtälöryhmillä on täsmälleen samat ratkaisut. Alkeisrivitoimituksen tekeminen ei siis muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. Lauseen todistus on esitetty luvun lopussa.

Yhtälöryhmää ratkaistaessa on tavoitteena muuttaa yhtälöryhmän matriisi alkeisrivitoimituksilla niin kutsutuksi redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut on helppo nähdä. Tutustutaan aluksi porrasmatriiseihin ja siirrytään sitten tutkimaan redusoituja porrasmatriiseja.

Määritelmä 5.6. Matriisi on *porrasmatriisi*, jos

1. mahdolliset nollarivit ovat alimpina.

2. kullakin rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio (eli *johtava alkio*) on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat porrasmatriiseja. Niiden johtavat alkiot on lihavoitu.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{14} & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{-3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & -41 & 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Määritelmä 5.7. Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos

1. se on porrasmatriisi.

2. jokaisen rivin johtava alkio on 1.

3. jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat redusoituja porrasmatriiseja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -53 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esimerkki 5.8. Matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

on redusoitu porrasmatriisi. Sitä vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 4 \\ \qquad x_2 \qquad = -2 \\ \qquad\qquad x_3 = 3. \end{cases}$$

Huomataan, että yhtälöryhmästä näkyy suoraan sen ratkaisu, joka on

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Ratkaisut on helppo nähdä juuri sen vuoksi, että yhtälöryhmän matriisi on redusoitu porrasmatriisi.

Tavoitteena on siis muuttaa yhtälöryhmän matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut näkyvät suoraan. Voidaan osoittaa, että mikä tahansa matriisi voidaan muuttaa alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi. Seuraava esimerkki näyttää, kuinka tämä tehdään.

Esimerkki 5.9. Tutkitaan matriisia

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ja muutetaan se redusoiduksi porrasmatriisiksi. Aloitetaan ensimmäisestä sarakkeesta. Vaihtamalla ensimmäisen ja toisen rivin paikat, saadaan ensimmäisen rivin johtavaksi alkioksi 1:

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen johtavan alkion alla olevat alkiot on helppo muuttaa nolliksi. Vähennetään ensin toisesta rivistä ensimmäinen rivi luvulla 2 kerrottuna:

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten kolmanteen riviin ensimmäinen rivi luvulla 1 kerrottuna:

$$\xrightarrow{R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nyt ensimmäinen sarake on halutussa muodossa. Siirrytään muokkaaman toista saraketta. Muutetaan ensin sen johtava alkio ykköseksi, jotta voidaan toimia samoin kuin edellä. Kerrotaan siis toinen rivi luvulla -1. Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{-1\cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Toisen rivin johtavan alkion avulla voidaan muuttaa sen alla oleva alkio nollaksi. Lisätään kolmanteen riviin toinen rivi luvulla 2 kerrottuna. Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

joka on porrasmatriisi.

Jatketaan muokkaamista niin, että saadaan aikaan redusoitu porrasmatriisi. Muutetaan ensin kaikki johtavat alkiot ykkösiksi:

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Muutetaan alimman rivin johtavan alkion avulla kaikki kolmannen sarakkeen muut alkiot nolliksi:

$$\xrightarrow{R_2-R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Näin saatu matriisi on redusoitu porrasmatriisi.

Saatu redusoitu porrasmatriisi on eri matriisi kuin se, josta lähdettiin liikkeelle. Matriisit myös vastaavat erilaisia yhtälöryhmiä. Näillä yhtälöryhmillä on kuitenkin samat ratkaisut.

Ohjeita redusoidun porrasmatriisin aikaansaamiseksi:

- Porrasmatriisia muodostetaan vasemmalta oikealle ja ylhäältä alaspäin.
- Johtavat alkiot kannattaa useimmiten muuttaa ykkösiksi.
- Johtavien alkioiden avulla muutetaan niiden alapuolella olevat alkiot nolliksi. Näin saadaan aikaan porrasmatriisi.

- Redusoitua porrasmatriisia muodostetaan oikealta vasemmalle ja alhaalta ylöspäin.
- Johtavien alkioiden avulla muutetaan niiden yläpuolella olevat alkiot nolliksi.
- Tee vain yksi alkeisrivitoimitus kerrallaan!

Gaussin-Jordanin menetelmä

Nyt olemme valmiita ottamaan käyttöön niin kutsutun Gaussin-Jordanin menetelmän, jonka avulla lineaariset yhtälöryhmät voidaan aina ratkaista.

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.
3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

Esimerkki 5.10. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 3. \end{cases}$$

Sen matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Tämä matriisi muutettiin redusoituksi porrasmatriisiksi esimerkissä **??**:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Redusoitua porrasmatriisia vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & & = & -1 \\ & & x_3 & = & 1. \end{cases}$$

Koska alkuperäisen yhtälöryhmän ratkasut ovat lauseen 5.5 nojalla samat kuin lopuksi saadun yhtälöryhmän, on yhtälöryhmä ratkaistu. Sen ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 1. \end{cases}$$

Esimerkki 5.11. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3x - 6y - 3z = -21. \end{cases}$$

Muutetaan sen matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ -3 & -6 & -3 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+3R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 0 = 3. \end{cases}$$

Alin yhtälö on aina epätosi, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Esimerkki 5.12. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 15x_3 = 9 \\ x_1 \qquad - \ 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Muutetaan sen matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 3 & -15 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1\cdot R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Saatua matriisia vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Alin yhtälö $0 = 0$ on aina tosi. Tuntemattomalle x_3 ei puolestaan aseteta mitään rajoitteita, joten se voi olla mikä tahansa reaaliluku. Sanotaan, että x_3 on *vapaa* *muuttuja*. Merkitään $x_3 = t$, missä $t \in \mathbb{R}$. Ratkaistaan vielä muut tuntemattomat. Ylin yhtälö saadaan muotoon $x_1 - 2t = 1$, joten $x_1 = 1 + 2t$. Toinen yhtälö puolestaan on $x_2 - t = 2$ eli $x_2 = 2 + t$. Siten yhtälön ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = t, \end{cases}$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Ratkaisuja on siis äärettömän monta. Esimerkiksi $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ ja $x_3 = 1$ sekä $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ja $x_3 = -1$ ovat yhtälöryhmän ratkaisuja. Jokaisella reaaliluvulla t yhtälöryhmälle saadaan eri ratkaisu.

Huomaa, että vapaat muuttujat näkyvät redusoidussa porrasmatriisissa sarakkeina, joissa ei ole lainkaan johtavaa alkiota.

Esimerkki 5.13. Lineaarisen yhtälöryhmän matriisi muutettiin alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Mikä on yhtälöryhmän ratkaisu?

Havaitaan, että johtavat alkiot ovat sarakkeissa 1, 3 ja 6. Muita sarakkeita vastaavat tuntemattomat x_2, x_4 ja x_5 ovat vapaita muuttujia. Merkitään $x_2 = r$, $x_4 = s$ ja $x_5 = t$, missä r, s, $t \in \mathbb{R}$.

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} x_1 + 3r + 4s = 7 \\ \phantom{x_1 + 3r + {}} x_3 + 2s = 0 \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_3 = -2s \\ x_6 = 3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s \\ x_4 = s \\ x_5 = t \\ x_6 = 3, \end{cases}$$

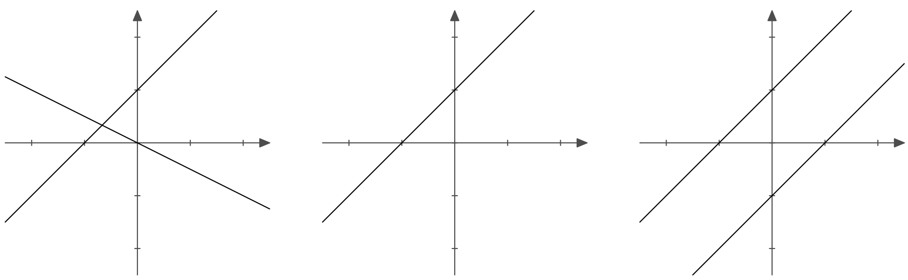
missä $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Esimerkeistä huomataan, että yhtälöryhmällä voi olla täsmälleen yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua. Kun muuttujia on kaksi, tilannetta voi havainnollistaa kuvan avulla. Tutkitaan yhtälöparia

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Oletetaan, että yhtälöllä on ratkaisu $x = r$, $y = s$. Sitä voidaan ajatella tason pisteenä (r, s). Koska ratkaisu toteuttaa ensimmäisen yhtälön, piste (r, s) on suoralla, jonka yhtälö on $ax + by = c$. Samoin piste (r, s) on suoralla, jonka yhtälö on $dx + ey = f$. Piste (r, s) on siis molemmilla suorilla, eli se on suorien leikkauspiste.

Jos yhtälöt määrittävät kaksi erisuuntaista suoraa, on niillä on täsmälleen yksi leikkauspiste. Tällöin yhtälöparilla on täsmälleen yksi ratkaisu. Jos yhtälöt määrittävät saman suoran, on leikkauspisteitä äärettömän monta. Silloin ratkaisujakin on äärettömän monta. Jos yhtälöiden määrittämät suorat eivät ole samat mutta ovat kuitenkin yhdensuuntaiset, ei leikkauspisteitä ole. Silloin ei myöskään yhtälöparilla ole ratkaisuja.



Kuva 5.17: Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua.

Esimerkki 5.14. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = -2\,. \end{cases}$$

Tutkitaan, miten luvun k arvot vaikuttavat ratkaisujen lukumäärään. Ryhdytään muuttamaan yhtälöryhmän matriisia redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-kR_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -2-k \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array}\right]$$

Kaikki alkeisrivitoimitukset voidaan tähän asti tehdä riippumatta siitä, mikä luku k on. Jatkaminen ei kuitenkaan onnistu, sillä toisen rivin alkio $k-1$ saattaa olla nolla, samoin kolmannen rivin alkio $2-k-k^2$. Tarkastellaan näitä tapauksia erikseen.

Oletetaan ensin, että kolmannen rivin alkio $2-k-k^2=0$ eli $k=-2$ tai $k=1$.

- Jos $k=-2$, viimeinen matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö $0=0$ on aina tosi. Lisäksi tuntematonta x_3 vastaavassa sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota, joten x_3 on vapaa muuttuja. Ratkaisuja on siten äärettömän monta.

- Jos $k=1$, viimeinen matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

  Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö $0=-3$ on aina epätosi. Siten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

Oletetaan sitten, että toisen rivin alkio $k-1=0$ eli $k=1$. Tämä tapaus käsiteltiin sattumalta jo edellä.

Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta, jossa sekä toisen rivin alkio $k-1$ että kolmannen rivin alkio $2-k-k^2$ ovat nollasta poikkeavia. Tällöin voidaan jatkaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Koska $k-1\neq 0$ ja $2-k-k^2\neq 0$ saadaan

$$\xrightarrow{\frac{1}{k-1}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2-k-k^2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (-2-k)/(2-k-k^2) \end{array}\right].$$

Tällöin yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Päädyttiin siis seuraavaan tulokseen: Yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, jos ja vain jos $k=-2$. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, jos ja vain jos $k=1$. Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, jos ja vain jos $k\neq 1$ ja $k\neq -2$.

Käydään vielä lopuksi läpi lauseen 5.5 todistus, joka sivuutettiin luvun alussa.

Todistus. Osoitetaan, että jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit. Tätä varten riittää näyttää, että alkeisrivitoimituksen tekeminen ei vaikuta yhtälöryhmän ratkaisuihin. Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \tag{1}$$

missä $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$.

1. Ensinnäkin huomataan, että yhtälöryhmän rivien järjestyksellä ei ole väliä. Siten kahden rivin paikkojen vaihtaminen ei muuta yhtälöryhmän ratkaisuja.

2. Tutkitaan sitten alkeisrivitoimitusta, joka kertoo rivin i luvulla $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tuloksena on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ ca_{i1}x_1 & + & ca_{i2}x_2 & + & \cdots & + & ca_{in}x_n & = & cb_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{2}$$

On osoitettava, yhtälöryhmillä (1) ja (2) on samat ratkaisut. Tämä tehdään kahdessa osassa. Ensin näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (1) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu. Sitten näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (2) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (1) ratkaisu.

Oletetaan ensin, että $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$ on yhtälöryhmän (1) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (2) ratkaisu. Oletuksen perusteella pätee

$$\begin{cases} a_{11}r_1 & + & a_{12}r_2 & + & \cdots & + & a_{1n}r_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{i1}r_1 & + & a_{i2}r_2 & + & \cdots & + & a_{in}r_n & = & b_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}r_1 & + & a_{m2}r_2 & + & \cdots & + & a_{mn}r_n & = & b_m. \end{cases}$$

Kun i:nnen yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla c, saadaan yhtälö

$$ca_{i1}r_1 + \cdots + ca_{in}r_n = cb_i.$$

Nyt siis $x_1 = r_1, \dots x_n = r_n$ toteuttaa yhtälöryhmän (2), ja siten se on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu.

Oletetaan sitten, että $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$ on yhtälöryhmän (2) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (1) ratkaisu. Nyt siis

$$\begin{cases} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \cdots & + & a_{1n}s_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ ca_{i1}s_1 & + & ca_{i2}s_2 & + & \cdots & + & ca_{in}s_n & = & cb_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}s_1 & + & a_{m2}s_2 & + & \cdots & + & a_{mn}s_n & = & b_m. \end{cases}$$

Koska $c \neq 0$, voidaan i:nnen yhtälön molemmat puolet jakaa luvulla c. Tällöin saadaan yhtälö $a_{i1}s_1 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$. Nyt nähdään, että $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$ toteuttaa myös yhtälöryhmän (1), joten se on myös yhtälöryhmän (1) ratkaisu. Siten yhtälöryhmillä on samat ratkaisut.

3. Kolmannen alkeisrivitoimituksen tarkastelu jätetään lukijalle.

$\square$

6 Virittäminen

Palataan sitten avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuksiin. Palautetaan mieleen, että vektoreiden $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä aliavaruus on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt osaamme vastata esimerkissä 4.5 esitettyyn kysymykseen. Esimerkissä haluttiin tietää, kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Tällöin päädyttiin yhtälöryhmään

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & & & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & -1. \end{array} \end{cases}$$

Kun yhtälöryhmä ratkaistaan Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä, nähdään, että ratkaisuja ei ole. Siten $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Esimerkki 6.1. Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Osoitetaan, että

$$\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2.$$

Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko. Tiedetään, että jokainen joukon $\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ vektori on avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori, joten on selvää, että $\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$. Näin ollen riittää näyttää, että $\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. On siis osoitettava, että jokainen avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori voidaan esittää vektoreiden $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ lineaarikombinaationa.

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$\bar{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2,$$

joten $\bar{v} \in \operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Siten $\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. On siis osoitettu, että $\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2$.

Esimerkki 6.2. Tutkitaan, millä ehdolla vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kuuluu vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (3, 2, -1), \quad \bar{v}_2 = (2, -2, 6) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (3, 4, -5)$$

virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Jotta vektori $\bar{w}$ olisi vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio, täytyy olla olemassa luvut x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}.$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & w_1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & w_2 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & w_3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisista saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -6 & 5 & -w_3 \\ 0 & 10 & -6 & w_2 + 2w_3 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 - 2w_2 - w_3 \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, jos ja vain jos alinta riviä vastaava yhtälö $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = w_1 - 2w_2 - w_3$ on tosi eli $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$. Siten vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ on aliavaruudessa $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$, jos ja vain jos $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$.

Nyt aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ voidaan kirjoittaa uudessa muodossa:

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 - 2w_2 - w_3 = 0\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_3 = w_1 - 2w_2\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_1 - 2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(w_1, 0, w_1) + (0, w_2, -2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{w_1(1, 0, 1) + w_2(0, 1, -2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Kyseessä on siis vektorien $(1, 0, 1)$ ja $(0, 1, -2)$ virittämä aliavaruus. Toisin sanottuna

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \operatorname{span}((1, 0, 1), (0, 1, -2)).$$

Eri vektorit voivat siis virittää saman aliavaruuden. Edes virittäjävektorien määrän ei tarvitse olla sama.

Esimerkki 6.3. Tutkitaan, virittävätkö vektorit

$$\bar{u}_1 = (1, 1, 0), \quad \bar{u}_2 = (1, 0, 1), \quad \bar{u}_3 = (0, 1, 1) \quad \text{ja} \quad \bar{u}_4 = (-2, 1, 1)$$

avaruuden $\mathbb{R}^3$. Oletetaan, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. On selvitettävä, onko olemassa lukuja $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 + x_4\bar{u}_4 = \bar{w}.$$

Saadaan yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right].$$

Tästä saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & w_1 - w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(w_3 + w_2 - w_1) \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja olivat w_1, w_2 ja w_3 mitä lukuja tahansa. Siten $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$. Näin ollen $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$.

Edellisen esimerkin virittäjät $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ eivät ole parhaat mahdolliset. Koska yhtälöryhmässä on vapaita muutujia, on yhtälöryhmällä äärettömän monta ratkaisua. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ alkiot voidaan siis kirjoittaa *usealla* eri tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Esimerkiksi jos $\bar{w} = (1, 2, 3)$, niin ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 2 - 2t \\ x_4 = t\,, \end{cases}$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Valitsemalla $t = 3$ saadaan

$$(1, 2, 3) = 3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 - 4\bar{u}_3 + 3\bar{u}_4$$

ja toisaalta valitsemalla $t = 1$ saadaan

$$(1, 2, 3) = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 0\bar{u}_3 + \bar{u}_4.$$

Tämä ei ole toivottavaa, vaan tavoitteena on löytää sellainen virittäjäjoukko, että aliavaruuden vektorit voidaan ilmaista virittäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Tällaisia virittäjäjoukkoja tutkitaan seuraavassa luvussa.

7 Vapaus

Määritelmä 7.1. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

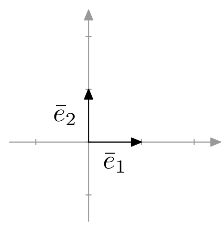
Jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa eli lineaarisesti riippumaton, voidaan myös sanoa, että vektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu*.

Tulemme näkemään, että jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, voidaan aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkiot kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Virittäjien joukossa ei siis ole tarpeettomia vektoreita.

Esimerkki 7.2. Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Osoitetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on lineaarisesti riippumaton. Oletetaan, että reaaliluvut c_1 ja c_2 ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 = \bar{0}.$$

Nyt $c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$, joten $(c_1, c_2) = (0, 0)$. Siten pätee $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$. Näin on osoitettu, että jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa.



Kuva 7.18: Jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa.

Esimerkki 7.3. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2)$ ja $\bar{v}_2 = (-3, -1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa vai sidottu.

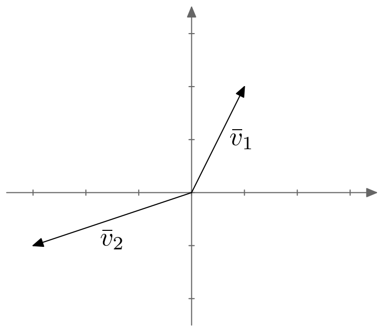
Oletetaan, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = \bar{0}$ joillakin c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Nyt $c_1(1, 2) + c_2(-3, -1) = (0, 0)$ eli

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä c_1 ja c_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ainoa ratkaisu on $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on siis vapaa.



Kuva 7.19: Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on vapaa.

Esimerkki 7.4. Kun osoitetaan jono sidotuksi, ei välttämättä tarvitse ratkaista yhtälöryhmää. Toisinaan on nimittäin helppo nähdä millaisten kertoimien avulla lineaarikombinaatiosta muodostuu nollavektori.

Merkitään $\bar{w}_1 = (2, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (-4, -2)$. Huomataan, että

$$2\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \bar{0}.$$

Siten jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on sidottu.

Esimerkki 7.5. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2)$, $\bar{v}_2 = (-3, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, 1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa vai sidottu. Oletetaan, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ joillakin c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. Tällöin $c_1(1, 2) + c_2(-3, -1) + c_3(-1, 1) = (0, 0)$ eli

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä c_1 ja c_2:

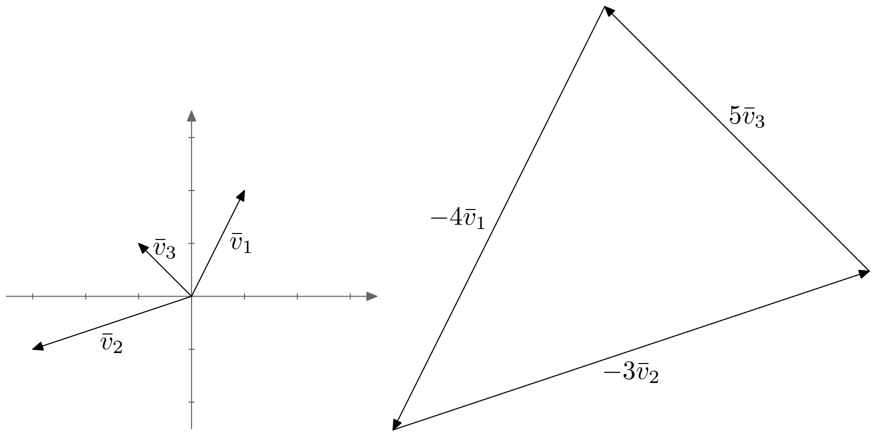
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right].$$

Huomataan, että yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua:

$$\begin{cases} x_1 = -(4/5)t \\ x_2 = -(3/5)t \\ x_3 = t, \end{cases}$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Siten $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ ei ole ainoa ratkaisu. Voidaan valita esimerkiksi $t = 5$, jolloin $c_1 = -4$ ja $c_2 = -3$ ja $c_3 = 5$. Tällöin $-4\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3 = \bar{0}$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on siis sidottu. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 7.20.



Kuva 7.20: Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu.

Määritelmän mukaan jonon vapaus kertoo siitä, että nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla jonon vektorien lineaarikombinaationa. Yhtälö

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

toteutuu ainakin, jos kertoimiksi $c_1, \ldots, c_k$ valitaan nollat. Toisinaan yhtälö kuitenkin toteutuu myös joillakin muilla kertoimilla. Jono on vapaa, jos nollavektori voidaan kirjoittaa jonon vektorien lineaarikombinaationa *täsmälleen yhdellä tavalla.*

Seuraava lause osoittaa, että vektorijono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ kaikki vektorit voidaan ilmaista täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatioina. Siis jos nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa, myös kaikki muut aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ vektorit voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa. Vapaat vektorijonot ovat kiinnostavia nimen omaan sen vuoksi, että niistä saadaan virittäjäjoukko, jossa ei ole turhia vektoreita.

Lause 7.6. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. Muotoa ”jos ja vain jos” oleva väite todistetaan kahdessa osassa. Ensin oletetaan väitteen ensimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin jälkimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään usein symbolilla ”$\Rightarrow$”. Sitten oletetaan jälkimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin ensimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään symbolilla ”$\Leftarrow$”. Ryhdytään todistamaan väitettä.

"$\Rightarrow$": Oletetaan ensin, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoitetaan, että jokainen aliavaruuden $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Oletetaan, että alkio $w \in W$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$$

ja lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$$

joillakin $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Nyt $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$, joten

$$a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k - (b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k) = \bar{0}.$$

Vektorien yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun ominaisuuksien perusteella pätee

$$(a_1 - b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k - b_k)\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on oletuksen nojalla vapaa, joten yllä olevasta yhtälöstä seuraa, että sen kaikki kertoimet ovat nollia: $a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_k - b_k = 0$. Siten $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$. Näin ollen tutkitut lineaarikombinaatiot ovatkin välttämättä samat. Siksi vektoria $\bar{w}$ ei voida kirjoittaa usealla eri tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että jokainen aliavaruuden $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Osoitetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Sitä varten oletetaan, että luvut $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Tiedetään, että ainakin

$$0 \cdot \bar{v}_1 + 0 \cdot \bar{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \bar{v}_k = \bar{0}.$$

Koska vektori $\bar{0}$ on aliavaruuden W alkio, se voidaan kirjoittaa virittäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Siten täytyy päteä $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$. Siis jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. □

Seuraava lause osoittaa, että vektorijono on sidottu, jos ja vain jos jokin sen vektoreista voidaan ilmaista toisten lineaarikombinaationa.

Lause 7.7. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ja $k \geq 2$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos*

$$\bar{v}_j \in \text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu. On siis olemassa luvut $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, joilla pätee

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0},$$

ja lisäksi $c_j \neq 0$ jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Nyt

$$c_j\bar{v}_j = -c_1\bar{v}_1 - \cdots - c_{j-1}\bar{v}_{j-1} - c_{j+1}\bar{v}_{j+1} - \cdots - c_k\bar{v}_k$$

ja edelleen

$$\bar{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\bar{v}_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\bar{v}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\bar{v}_{j+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_j}\bar{v}_k.$$

Siis $\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Nyt on olemassa sellaiset $c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, että

$$\bar{v}_j = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Tästä seuraa, että

$$\bar{0} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + (-1)\bar{v}_j + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Koska kerroin -1 ei ole nolla, on jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ sidottu. □

Esimerkki 7.8. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_3 = (0, 0, 2)$ ja $\bar{v}_4 = (3, -1, 0)$. Tällöin esimerkiksi

$$2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + 0\bar{v}_3 - \bar{v}_4 = \bar{0},$$

joten jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ on sidottu. Edellisen lauseen perusteella jokin vektoreista voidaan kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa. Nähdään, että esimerkiksi

$$\bar{v}_2 = -2\bar{v}_1 + 0\bar{v}_3 + \bar{v}_4.$$

Kaikkia vektoreita ei kuitenkaan välttämättä voida kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa. Esimerkiksi

$$\bar{v}_3 \neq a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_4$$

kaikilla a, b, $c \in \mathbb{R}$. (Tämän todistuksen yksityiskohdat jätetään lukijalle.)

7.1 Homogeeniset yhtälöryhmät ja vapaus

Vektorijonon vapautta tutkittaessa päädytään ratkaisemaan yhtälöryhmiä, joissa vakiot ovat nollia. Tällaista yhtälöryhmää kutsutaan homogeeniseksi.

Määritelmä 7.9. Lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kaikki vakiot ovat nollia, on nimeltään *homogeeninen yhtälöryhmä.*

Homogeeninen yhtälöryhmä on siis muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

missä $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$. Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina ainakin yksi ratkaisu

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Tätä kutsutaan yhtälöryhmän triviaaliksi ratkaisuksi.

Lause 7.10. *Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on suurempi kuin yhtälöiden määrä m, niin homogeenisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.*

Todistus. Ensinnäkin yhtälöryhmällä on välttämättä ainakin triviaali ratkaisu. Siten ratkaisuja on joko yksi tai äärettömän monta.

Oletuksen mukaan yhtälöryhmän matriisissa on enemmän sarakkeita kuin rivejä. Johtavia alkioita enintään yksi joka rivillä. Koska sarakkeita on enemmän kuin rivejä, on matriisissa ainakin yksi sarake, jossa ei ole johtavaa alkiota. Siten vapaita muuttujia on ainakin yksi, ja yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. □

Korollaari 7.11. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$, missä $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Jos $m > n$, niin jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ on sidottu.*

Huom. Korollaari on lause joka seuraa suoraan tai lähes suoraan toisesta lauseesta. Tämä korollaari on lauseen 7.10 seuraus.

Todistus. Merkitään $\bar{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{nk})$ kaikilla $k \in \{1, \ldots, m\}$. Nyt yhtälöä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_m\bar{v}_m = \bar{0}$ vastaavaksi yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1m}x_m = 0 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \cdots + v_{2m}x_m = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{nm}x_m = 0. \end{cases}$$

Tässä homogeenisessa yhtälöryhmässä on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä. Siten yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. Koska löytyy muitakin ratkaisuja kuin triviaaliratkaisu, ei jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ ole vapaa. □

Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on pienempi tai yhtä suuri kuin yhtälöiden määrä m, ei ratkaisujen määrästä voi äkkiseltään sanoa mitään varmaa. Ratkaisuja voi olla täsmälleen yksi (triviaali ratkaisu) tai äärettömän monta. Jos siis avaruuden $\mathbb{R}^n$ jonon $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ pituus m on *pienempi* kuin n, ei jonon lineaarisesta riippumattomuudesta voida sanoa sen perusteella mitään.

8 Kanta

Tässä luvussa W on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$ virittämä aliavaruus eli

$$W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m).$$

Määritelmä 8.1. Oletetaan, että $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k \in W$. Vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos

a) $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ ja

b) $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

Esimerkki 8.2. Esimerkissä 6.1 osoitettiin, että vektorit $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$. Jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on lisäksi vapaa esimerkin 7.2 perusteella. Siten $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Vastaavasti avaruudella $\mathbb{R}^n$ on kanta

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n).$$

Tässä $\bar{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, missä luku 1 on vektorin i:s komponentti. Kantaa kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *luonnolliseksi kannaksi.* Lukijan tehtäväksi jätetään osoittaa, että kyseessä on todellakin kanta.

Kanta siis virittää aliavaruuden ja on lisäksi vapaa. Lauseesta 7.6 saadaan seuraava hyvin käyttökelpoinen tulos:

Lause 8.3. *Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Tällöin kannan määritelmän nojalla $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ ja jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa. Lauseesta 7.6 seuraa, että jokainen aliavaruuden $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ vektori voidaan kirjoittaa tasan yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa. Tästä seuraa ensinnäkin, että $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$. Nyt lauseen 7.6 mukaan jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa. Näin kannan määritelmän molemmat ehdot täyttyvät. Siis $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. $\square$

Esimerkki 8.4. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$. Osoitetaan lauseen 8.3 avulla, että $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Ratkaistaan yhtälö $x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 = \bar{v}$ eli yhtälö $x_1(2, -1) + x_2(1, 3) = (v_1, v_2)$. Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & = & v_1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & v_2. \end{cases}$$

Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisriviotoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (3v_1 - v_2)/7 \\ 0 & 1 & (v_1 + 2v_2)/7 \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu riippumatta vektorista $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Siis jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

8.1 Koordinaatit

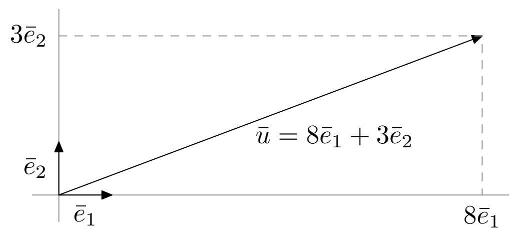
Määritelmä 8.5. Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in W$. Vektorin $\bar{u}$ *koordinaateiksi kannan $\mathcal{B}$ suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \ldots, a_k$, joilla

$$\bar{u} = a_1\bar{w}_1 + \cdots + a_k\bar{w}_k .$$

Huomaa, että vektorin koordinaatit jokin tietyn kannan suhteen ovat yksikäsitteiset, sillä vektori voidaan lauseen 8.3 mukaan kirjoitaa vain yhdellä tavalla kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Vektorilla on siis vain yhdet koordinaatit jonkin tietyn kannan suhteen. Eri kantojen suhteen saman vektorin koordinaatit voivat tietenkin olla erilaisia.

Esimerkki 8.6. Määritetään vektorin $\bar{u} = (8, 3)$ koordinaatit avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollisen kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen. Koordinaatit ovat 8 ja 3, sillä

$$\bar{u} = 8(1, 0) + 3(0, 1) = 8\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2.$$



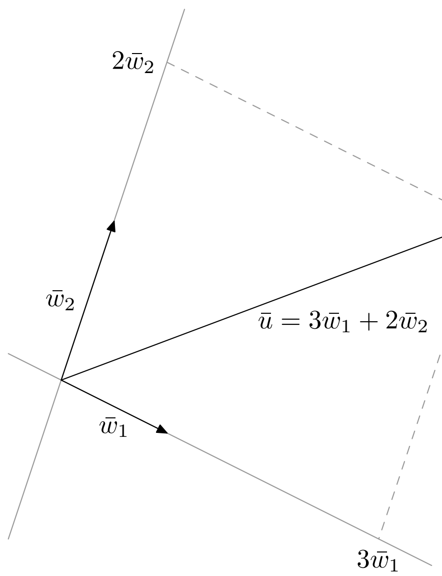
Kuva 8.21: Vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen ovat 8 ja 3.

Tutkitaan sitten vektorin $\bar{u}$ koordinaatteja jonkin toisen kannan suhteen. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$. Esimerkin 8.4 perusteella $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Määritetään vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen. On siis ratkaistava yhtälö $x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 = \bar{u}$ eli yhtälö $x_1(2, -1) + x_2(1, 3) = (8, 3)$. Esimerkistä 8.4 nähdään, että yhtälön ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = (3u_1 - u_2)/7 = (24 - 3)/7 = 3 \\ x_2 = (v_1 + 2v_2)/7 = (8 + 6)/8 = 2 . \end{cases}$$

Siis $\bar{u} = 3\bar{w}_1 + 2\bar{w}_2$, eli kysytyt koordinaatit ovat 3 ja 2. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 8.22.



Kuva 8.22: Vektorin $\bar{u}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen ovat 3 ja 2.

8.2 Dimensio

Aliavaruudella voi olla useita eri kantoja, mutta jokaisessa niistä on yhtä monta vektoria.

Lause 8.7. *Aliavaruuden W jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_j)$ ja $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ ovat molemmat aliavaruuden W kantoja. Pyritään osoittamaan, että $j = k$. Tehdään se osoittamalla, että muut vaihtoehdot $j < k$ ja $k < j$ johtavat ristiriitaan.

Oletetaan, että $j < k$. Tarkastellaan yhtälöä

$$x_1\bar{w}_1 + \cdots + x_k\bar{w}_k = \bar{0}\,. \tag{3}$$

Koska $\mathcal{B}$ on W:n kanta, voidaan kaikki kannan $\mathcal{C}$ vektorit kirjoittaa kannan $\mathcal{B}$ vektorien lineaarikombinaatioina:

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1j}\bar{v}_j \\
\bar{w}_2 &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2j}\bar{v}_j \\
&\vdots \\
\bar{w}_k &= a_{k1}\bar{v}_1 + a_{k2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{kj}\bar{v}_j
\end{aligned}$$

joillakin $a_{11}, \dots, a_{kj} \in \mathbb{R}$.

Sijoittamalla nämä yhtälöön (3) saadaan yhtäpitävä yhtälö:

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1j}\bar{v}_j) \\ + x_2(a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2j}\bar{v}_j) \\ + \cdots + x_k(a_{k1}\bar{v}_1 + a_{k2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{kj}\bar{v}_j) = \bar{0} \end{aligned}$$

ja edelleen ryhmittelemällä:

$$\begin{aligned} (x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_ka_{k1})\bar{v}_1 \\ + (x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_ka_{k2})\bar{v}_2 \\ + \cdots + (x_1a_{1j} + x_2a_{2j} + \cdots + x_ka_{kj})\bar{v}_j = \bar{0} \end{aligned}$$

Jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ on kanta, joten se on vapaa. Siten edellinen yhtälö toteutuu, jos ja vain jos kaikki kertoimet ovat nollia:

$$\begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_ka_{k1} = 0 \\ x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_ka_{k2} = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ x_1a_{1j} + x_2a_{2j} + \cdots + x_ka_{kj} = 0 \end{cases}$$

Kyseessä on homogeeninen yhtälöryhmä, jossa tuntemattomien määrä k on suurempi kuin yhtälöiden määrä j. Lauseen 7.10 mukaan yhtälöryhmällä on muitakin ratkaisuja kuin $x_1 = 0, \dots, x_k = 0$. Siis jono $\mathcal{C} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on sidottu. Tämä on ristiriita, sillä $\mathcal{C}$ on aliavaruuden W kanta.

Tapaus $j > k$ käsitellään vastaavasti. Tällöinkin päädytään ristiriitaan. Siten täytyy päteä $j = k$. □

Voidaan osoittaa, että jokaisella avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudella on kanta. (Tämä todistetaan kurssin toisessa osassa.) Lisäksi edellä nähtiin, että jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria. Kantavektorien lukumäärää kutsutaan avaruuden dimensioksi.

Määritelmä 8.8. Aliavaruuden W *dimensio* $\dim(W)$ on aliavaruuden W kannan vektoreiden lukumäärä.

Jos aliavaruuden dimensio on n, sanotaan, että aliavaruus on n-*ulotteinen*.

Esimerkki 8.9. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ dimensio on 2, sillä avaruudella on kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Vastaavasti avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio on n, sillä avaruuden luonnollisen kannan vektorien lukumäärä on n.

Esimerkki 8.10. Merkitään $\bar{v}_1 = (3, -1, 5)$, $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ ja $\bar{v}_3 = (0, -5, 1)$. Olkoon $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Määritetään aliavaruuden W dimensio.

Oletetaan, että $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$. Selvitetään, mikä ehto vektorin $\bar{u}$ komponenttien pitää toteuttaa, jotta $\bar{u}$ on aliavaruudessa W. Ratkaistaan yhtälö $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{u}$ eli yhtälö

$$x_1(3,-1,5) + x_2(2,1,3) + x_3(0,-5,1) = (u_1,u_2,u_3).$$

Sitä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}-5x_3} = u_1 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = u_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = u_3\,. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 3 & 2 & 0 & u_1 \\ -1 & 1 & -5 & u_2 \\ 5 & 3 & 1 & u_3 \end{array}\right]$$

ja se saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua matriisiksi

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 5 & -u_2 \\ 0 & 1 & -3 & (u_1+3u_2)/5 \\ 0 & 0 & 0 & (5u_3+u_2-8u_1)/5 \end{array}\right].$$

Havaitaan, että yhtälöryhmällä on ratkaisu, jos ja vain jos alinta riviä vastaava yhtälö $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = (5u_3 + u_2 - 8u_1)/5$ on tosi eli $5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0$. Siten

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) \\ &= \{(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5u_3 + u_2 - 8u_1 = 0\} \\ &= \{(u_1, 8u_1 - 5u_3, u_3) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u_1(1,8,0) + u_3(0,-5,1) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}((1,8,0),(0,-5,1)). \end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että vektorit $(1,8,0)$ ja $(0,-5,1)$ virittävät aliavaruuden. Lisäksi nämä kaksi vektoria ovat lineaarisesti riippumattomia. (Tämän osoittaminen jätetään lukijalle.) Siten jono $((1,8,0),(0,-5,1))$ on avaruuden W kanta, ja $\dim(W) = 2$.

9 Matriisit

Reaalialkioinen $m \times n$ *-matriisi* on reaalilukutaulukko, jossa on m riviä ja n saraketta. Esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

on $m \times n$ -matriisi. Voidaan myös sanoa, että matriisin A *tyyppi* on $m \times n$. Kaikkien reaalikertoimisten $m \times n$ -matriisien joukkoa merkitään $\mathbb{R}^{m \times n}$. Matriisissa olevia lukuja kutsutaan matriisin *alkioiksi*, ja rivillä i sarakkeessa j olevaa alkiota merkitään $A(i, j)$. Esimerkiksi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 11 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}$$

on reaalikertoiminen 4×3 -matriisi eli $B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$. Nähdään, että $B(1, 3) = 5$ ja $B(2, 2) = 11$.

Samalla tavalla voidaan määritellä kompleksialkioisten matriisien joukot $\mathbb{C}^{m \times n}$. Kaikki jatkossa esiteltävät ominaisuudet pätevät myös kompleksimatriiseille, vaikka tekstissä puhutaan vain reaalialkioisista matriiseista.

9.1 Matriisien laskutoimituksia

Matriisien *yhteenlasku* määritellään seuraavasti. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matriisien A ja B summa saadaan laskemalla yhteen samoissa kohdissa olevat alkiot. Tuloksena on $m \times n$ -matriisi $A + B$, jolle pätee

$$(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$$

kaikilla $i \in \{1, \dots, m\}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen.

Minkä tahansa matriisin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ voi kertoa reaaliluvulla c, ja tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi*. Saatava tulos on $m \times n$ -matriisi cA, jota nimitetään matriisin A *skalaarimonikerraksi* ja jolle pätee

$$(cA)(i, j) = c \cdot A(i, j)$$

kaikilla $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$. Esimerkiksi

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisia $(-1)A$ on tapana merkitä $-A$ ja matriisisummaa $A + (-B)$ on tapana merkitä $A - B$.

Matriiseille voidaan määritellä myös *matriisikertolasku*. Tämä laskutoimitus on hieman monimutkaisempi kuin edellä määritellyt. Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään vain, jos ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä. Olkoot siis $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Tällöin tulo AB on $m \times p$ -matriisi, jolle pätee

$$\begin{aligned}(AB)(i,j) &= A(i,1)B(1,j) + A(i,2)B(2,j) + \cdots + A(i,n)B(n,j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j)\end{aligned}$$

kaikilla $i \in \{1,\dots,m\}$ ja $j \in \{1,\dots,p\}$.[1]

Esimerkki 9.1. Lasketaan matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tulo. Koska matriisissa A on kolme saraketta (tyyppi 2×3) ja matriisissa B on vastaavasti kolme riviä (tyyppi 3×2), matriisit voidaan kertoa keskenään. Tulosmatriisi on tyyppiä 2×2. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 0 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esimerkki 9.2. Matriisikertolasku ei ole vaihdannainen operaatio eli tulon tekijöiden järjestystä ei voi vaihtaa. Tarkastellaan vaikkapa matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1] Merkintä $\sum_{k=1}^{n} c_k$ tarkoittaa summaa $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

Huomataan, että

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{mutta} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Siten $AB \neq BA$.

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi ja $k \in \{1, 2, \dots\}$. Tällöin voidaan määritellä *matriisipotenssi*

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ kpl}}.$$

9.2 Erityisiä matriiseja

Matriisia

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

jonka kaikki alkiot ovat nollia, kutsutaan *nollamatriisiksi*. *Ykkösmatriisi* puolestaan on

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Ei ole vaikea nähdä, että matriisikertolaskussa ykkösmatriisit käyttäytyvät kuin reaaliluku 1 tavallisessa kertolaskussa: kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pätee

$$I_m A = A I_n = A.$$

Jos matriisien tyypeistä ei ole epäselvyyttä, saatetaan merkitä yksinkertaisemmin $O_{m\times n} = O$ ja $I_n = I$.

Neliömatriisi on matriisi, jossa on yhtä monta riviä ja saraketta. Neliömatriisin alkio on *lävistäjällä*, jos alkion rivin ja sarakkeen numerot ovat samat. Matriisi, jonka kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat lävistäjällä, on *lävistäjämatriisi*. Lävistäjämatriisi, jonka kaikki lävistäjäalkiot ovat samoja, on puolestaan *skalaarimatriisi*. Skalaarimatriisit ovat ykkösmatriisin skalaarimonikertoja. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

on lävistäjämatriisi ja

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3$$

on skalaarimatriisi.

9.3 Matriisien laskusääntöjä

Lause 9.3. *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A, B ja C sekä reaaliluvulle a, jos laskutoimitukset on määritelty:*

a) $A + B = B + A$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) $A(BC) = (AB)C$

d) $A(B + C) = AB + AC$

e) $(A + B)C = AC + BC$

f) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

Todistus. Osoitetaan esimerkin vuoksi kohta d). Muiden kohtien tarkistaminen jätetään lukijalle.

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Nyt $A(B + C)$ ja $AB + AC$ ovat molemmat $m \times p$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}\big(A(B + C)\big)(i, j) &= \sum_{k=1}^{n} A(i, k) \cdot (B + C)(k, j)\\ &= \sum_{k=1}^{n} A(i, k)\big(B(k, j) + C(k, j)\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(A(i, k)B(k, j) + A(i, k)C(k, j)\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} A(i, k)B(k, j) + \sum_{k=1}^{n} A(i, k)C(k, j)\\ &= (AB)(i, j) + (AC)(i, j)\\ &= (AB + AC)(i, j).\end{aligned}$$

Koska matriisit $A(B+C)$ ja $AB+AC$ ovat samaa tyyppiä ja niillä on täsmälleen samat alkiot, pätee $A(B + C) = AB + AC$. □

9.4 Matriisin transpoosi

Määritelmä 9.4. Oletetaan, että A on $m \times n$ -matriisi. Sen *transpoosi* A^T on $n \times m$-matriisi, joka saadaan vaihtamalla matriisin A rivit ja sarakkeet keskenään.

Esimerkiksi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transpoosi on

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 9.5. Neliömatriisin A sanotaan olevan *symmetrinen*, jos $A^T = A$. Neliömatriisin A sanotaan olevan *antisymmetrinen*, jos $A^T = -A$.

Merkitään

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = B \quad \text{ja} \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = -C.$$

Siis B on symmetrinen ja C on antisymmetrinen.

Lause 9.6. *Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A ja B sekä reaaliluvulle t, jos laskutoimitukset on määritelty (ts. matriisit ovat sopivaa tyyppiä):*

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

c) $(AB)^T = B^T A^T$

d) $(tA)^T = t(A^T)$.

Todistus. Osoitetaan todeksi kohta c) ja jätetään loput kohdat lukijalle. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Nyt $(AB)^T$ ja $B^T A^T$ ovat molemmat $p \times m$ -matriiseja. On osoitettava, että kyseisten matriisien alkiot ovat samoja. Olkoot $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ja $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned}(AB)^T(i,j) = \big(AB\big)(j,i) &= \sum_{k=1}^{n} A(j,k) \cdot B(k,i) = \sum_{k=1}^{n} A^T(k,j) \cdot B^T(i,k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} B^T(i,k) \cdot A^T(k,j) = (B^T A^T)(i,j).\end{aligned}$$

Siten $(AB)^T = B^T A^T$. □

9.5 Käänteismatriisi

Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa saman tyyppinen neliömatriisi B, jolle pätee

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

sanotaan, että A on *kääntyvä* ja B on matriisin A *käänteismatriisi*.

Esimerkki 9.7. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi on

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

sillä

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lause 9.8. *Matriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi.*

Todistus. Oletetaan, että matriisilla A on käänteismatriisit B ja B'. Nyt

$$B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot B') = (B \cdot A) \cdot B' = I \cdot B' = B'.$$

Siten B ja B' ovat välttämättä sama matriisi. Näin ollen käänteismatriiseja ei voi olla enempää kuin yksi. □

Jos matriisi A on kääntyvä, sen käänteismatriisille käytetään merkintää A^{-1}. Huomaa, että merkintää A^{-1} ei voi käyttää ennen kuin on perustellut, että matriisi A todella on kääntyvä.

Lause 9.9. *Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä. Tällöin myös matriisit A^{-1}, AB ja A^T ovat kääntyviä. Niiden käänteismatriisit ovat seuraavat:*

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Todistus. Lauseen matriisit osoitetaan kääntyviksi näyttämällä, että niillä on käänteismatriisi.

Osoitetaan matriisi A^{-1} on kääntyväksi näyttämällä, että sen käänteismatriisi on A. Koska $A^{-1}A = I$ ja $AA^{-1} = I$, on A matriisin A^{-1} käänteismatriisi eli $(A^{-1})^{-1} = A$. Matriisia AB koskevien väitteiden todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Osoitetaan lopuksi, että $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Lauseen 9.6 nojalla

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I,$$

ja samalla tavalla osoitetaan, että $(A^{-1})^T A^T = I$. Siten $(A^{-1})^T$ on matriisin A^T käänteismatriisi. Tästä seuraa myös, että matriisi A^T on kääntyvä. □

Lause 9.10. *Matriisi*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

on kääntyvä, jos ja vain jos $ad - bc \neq 0$. *Jos matriisi* A *on kääntyvä, sen käänteismatriisi on*

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Todistus. Oletetaan, että $ad - bc \neq 0$. Merkitään

$$B = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voidaan todeta, että $AB = I$ ja $BA = I$. Siten B on matriisin A käänteismatriisi, ja A on kääntyvä.

Oletetaan sitten, että $ad - bc = 0$. Nyt on tutkittava kaksi eri tapausta: joko $a = 0$ tai $a \neq 0$. Jos $a = 0$, niin $bc = 0$. Siten joko $b = 0$ tai $c = 0$. Tällöin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{tai} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Kummassakaan tapauksessa ei ole olemassa matriisia B, jolle pätee $AB = I$. Tuloon AB tulee nimittäin välttämättä nollarivi tai nollasarake. Siten A ei ole kääntyvä.

Tutkitaan sitten tapaus $a \neq 0$. Nyt $d = bc/a$ ja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että on olemassa sellainen matriisi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

että $AB = I$. Tällöin

$$\begin{cases} ax + bz &= 1 \\ ay + bw &= 0 \\ cx + (bc/a)z &= 0 \\ cy + (bc/a)w &= 1. \end{cases}$$

Kolmannen yhtälön perusteella $c(x+bz/a) = 0$. Jos $c = 0$, päädytään samanlaiseen tilanteeseen kuin silloin, jos $a = 0$. Siten voidaa olettaa, että $c \neq 0$. Tällöin täytyy päteä $x + bz/a = 0$ eli $x = -bz/a$. Toisaalta ensimmäisen yhtälön perusteella $x = (1 - bz)/a$. Nyt $-bz = 1 - bz$, joten $1 = 0$. Tämä on mahdotonta. Siten matriisilla A ei ole käänteismatriisia. □

Suurempien matriisien käänteismatriiseille ei ole yhtä helppoa kaavaa. Käänteismatriisin määrittämistä käsitellään lisää luvussa 10.2.

9.6 Sarakevektorit

Usein avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ samastetaan matriisin

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

kanssa. Joukon $\mathbb{R}^{n\times 1}$ alkioita kutsutaan *sarakevektoreiksi*. Jos avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita ajatellaan sarakevektoreina, voi niitä kertoa matriiseilla. Jos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, on tulo $A\bar{v}$ määritelty, kun $\bar{v}$ tulkitaan joukon $\mathbb{R}^{n\times 1}$ alkioksi.

Esimerkki 9.11. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja vektorin $\bar{v} = (-5, 3)$ tulo on

$$A\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Tämä sarakevektori voidaan samastaa vektorin $(2, 5, 13)$ kanssa.

10 Matriisit ja yhtälöryhmät

Tulemme näkemään, että lineaariset yhtälöryhmät voidaan esittää käyttäen matriisikertolaskua. Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \tag{4}$$

kerroinmatriisiksi kutsutaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kerätään vielä muuttujat ja vakiot omiksi matriiseikseen:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Nyt yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisien avulla. Huomataan nimittäin, että

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Matriisissa $A\bar{x}$ näkyy siis yhtälöryhmän vasen puoli. Yhtälöryhmä voidaan näin ollen kirjoittaa muodossa $A\bar{x} = \bar{b}$.

Lause 10.1. *Jos matriisi A on kääntyvä, yhtälöllä on $A\bar{x} = \bar{b}$ täsmälleen yksi ratkaisu.*

Todistus. Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Todistuksessa on kaksi osaa. On osoitettava, että yhtälöllä on jokin ratkaisu ja että ratkaisuja ei ole enempää kuin yksi.

Osoitetaan ensin, että yhtälölle löytyy jokin ratkaisu. Koska A on kääntyvä, on olemassa käänteismatriisi A^{-1}. Nähdään, että $A^{-1}\bar{b}$ on yhtälön ratkaisu, sillä

$$A(A^{-1}\bar{b}) = (AA^{-1})\bar{b} = I\bar{b} = \bar{b}.$$

Osoitetaan sitten, ettei muita ratkaisuja ole. Oletetaan, että $\bar{y}$ on jokin (toinen) ratkaisu. Tällöin $A\bar{y} = \bar{b}$. Kerrotaan yhtälön molemmat puolet matriisilla A^{-1}, jolloin saadaan

$$A^{-1}(A\bar{y}) = A^{-1}\bar{b}$$

ja edelleen $\bar{y} = A^{-1}\bar{b}$. Kysymyksessä onkin sama ratkaisu, joka löydettiin jo aikaisemmin. Siten ratkaisuja on vain yksi ja se on $A^{-1}\bar{b}$. $\square$

10.1 Alkeismatriisit

Tässä luvussa nähdään, miten alkeisrivitoimitukset voi ilmaista matriisikertolaskun avulla. Osoittautuu, että jos matriisia kerrotaan niin kutsutulla alkeismatriisilla, tullaan matriisille tehneeksi alkeisrivitoimitus. Tästä tulee olemaan hyötyä kääntyvien matriisien käsittelyssä.

Määritelmä 10.2. Matriisi on *alkeismatriisi*, jos se on saatu ykkösmatriisista yhdellä alkeisrivitoimituksella.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat alkeismatriiseja:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nämä alkeismatriisit on saatu ykkösmatriisista tekemällä alkeisrivitoimitukset $-\frac{1}{2}R_3$, $R_2 \leftrightarrow R_4$ ja $R_3 + 3R_1$.

Esimerkki 10.3. Osoittautuu, että alkeismatriiseilla kertominen vastaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Tutkitaan tätä edellisen esimerkin alkeismatriisien ja matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

avulla. Nähdään, että

$$E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -\boldsymbol{\frac{1}{2}}a_{31} & -\boldsymbol{\frac{1}{2}}a_{32} & -\boldsymbol{\frac{1}{2}}a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$

$$E_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \end{bmatrix}$$

ja

$$E_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{3a_{11}} + a_{31} & \boldsymbol{3a_{12}} + a_{32} & \boldsymbol{3a_{13}} + a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että tässä tapauksessa alkeismatriisilla kerrottaessa matriisille A tullaan tehneeksi sama alkeisrivioperaatio, jonka avulla alkeismatriisi muodostettiin.

Yksittäinen esimerkki ei takaa, että alkeismatriisilla kertominen vastaa aina alkeisrivitoimituksen tekemistä. Esimerkin perusteella voi kuitenkin ymmärtää, miksi näin on. Väitteen todistaminen on melko työlästä, joten se jätetään väliin.

Lemma 10.4. *Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Olkoon E alkeismatriisi, joka saadaan tekemällä jokin alkeisrivitoimitus ykkösmatriisille I_n. Jos matriisille A tehdään sama alkeisrivitoimitus, tuloksena on matriisi EA.*

Huom. Lemma tarkoittaa apulausetta. Se on siis pieni tulos, jota voidaan käyttää hyväksi vaikkapa suurempien lauseiden todistamisessa.

Lause 10.5. *Alkeismatriisit ovat kääntyviä, ja alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi.*

Todistus. Tarkkaa todistusta ei esitetä tässä. Käydään kuitenkin läpi todistuksen idea.

Jokainen alkeisrivitoimitus voidaan peruuttaa toisella alkeisrivitoimituksella kuten kohta nähdään. Kutsutaan tätä alkeisrivitoimitusta alkuperäisen alkeisrivitoimituksen *käänteistoimitukseksi.*

Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Jos matriisille tehdään alkeisrivitoimitus $R_i \leftrightarrow R_j$, päästään takaisin alkutilanteeseen tekemällä sama alkeisrivitoimitus uudelleen. Alkeisrivitoimitus $R_i \leftrightarrow R_j$ on siis itsensä käänteistoimitus. Alkeisrivitoimituksen aR_i käänteistoimitus on puolestaan $\frac{1}{a}R_i$, ja alkeisrivitoimituksen R_i+bR_j käänteistoimitus on $R_i - bR_j$.

Alkeismatriisin käänteismatriisi saadaan aina käänteistoimitusta vastaavasta alkeismatriisista. Alkeisrivitoimitusta $R_i \leftrightarrow R_j$ vastaava alkeismatriisi on oma käänteismatriisinsa, alkeisrivitoimitusta aR_i vastaavan alkeismatriisin käänteismatriisi on alkeisrivitoimitusta $\frac{1}{a}R_i$ vastaava alkeismatriisi ja niin edelleen. Alkeisrivitoimituksen tekeminen vastaa nimittäin alkeismatriisilla kertomista. Esimerkiksi alkeisrivitoimitukset aR_i ja $\frac{1}{a}R_i$ peräkkäin suoritettuina eivät tee matriisille mitään. Siten niitä vastaavien alkeismatriisien tulo on ykkösmatriisi, jolla kertominen ei tee matriisille mitään.

□

Esimerkki 10.6. Etsitään alkeismatriisin

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Matriisi vastaa alkeisrivitoimitusta $R_3 + 3R_1$. Tämän alkeisrivitoimituksen voi kumota tekemällä alkeisrivitoimituksen $R_3 - 3R_1$. Sitä vastaava alkeismatriisi on

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla voi vielä varmistaa, että $EF = I$ ja $FE = I$. Siis $E^{-1} = F$.

Lause 10.7. *Oletetaan, että A on $n \times n$-neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

a) Matriisi A on kääntyvä.

b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

Todistus. Osoitetaan väite todistamalla seuraava päättelyketju:

$$\text{a)} \Rightarrow \text{b)} \Rightarrow \text{c)} \Rightarrow \text{d)} \Rightarrow \text{e)} \Rightarrow \text{a)}.$$

Tämän jälkeen tiedetään, että jokainen lauseen kohta on yhtäpitävä toisten kohtien kanssa.

a) $\Rightarrow$ b): Väite on osoitettu lauseessa 10.1.

b) $\Rightarrow$ c): Oletetaan, että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Tämä pätee myös, jos $\bar{b} = \bar{0}$. Toisaalta yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on aina ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Siten $\bar{x} = \bar{0}$ on ainoa ratkaisu.

c) $\Rightarrow$ d): Oletetaan, että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Merkitään $A(i,j) = a_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Yhtälöä vastaava lineaarinen yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0, \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu ja muuttujia on yhtä monta kuin yhtälöitä, täytyy yhtälöryhmän olla ekvivalentti yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 0 \\ & x_2 & & = & 0 \\ & & & \vdots & \\ & & x_n & = & 0, \end{cases}$$

kanssa. Tämä tarkoittaa, että matriisi A saadaan alkeisrivitoimituksilla muutettua ykkösmatriisiksi. Toisin sanottuna A on riviekvivalentti matriisin I kanssa.

d) $\Rightarrow$ e): Oletetaan, että matriisi A riviekvivalentti ykkösmatrisiin kanssa. Olkoot $E_1, \dots, E_k$ ne alkeismatriisit, joilla kertomalla matriisista A saadaan redusoitu porrasmatriisi. Nyt siis pätee

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

Kun yhtälön vasemmat puolet kerrotaan matriisilla E_k^{-1}, saadaan $E_{k-1} \cdots E_1 A = E_k^{-1}$. Kun tämän yhtälön vasemmat puolet kerrotaan matriisilla E_{k-1}^{-1}, saadaan $E_{k-2} \cdots E_1 A = E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$. Jatkamalla samaan tapaan päädytään yhtälöön

$$A = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}.$$

Koska alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi, on väite todistettu.

e) $\Rightarrow$ a): Oletetaan, että $A = E_1 \cdots E_k$, missä $E_1, \dots, E_k$ ovat alkeismatriiseja. Merkitään

$$B = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
AB &= (E_1 \cdots E_k^{-1})(E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}) = E_1 \cdots (E_k^{-1} E_k^{-1}) \cdots E_1^{-1} \\
&= E_1 \cdots E_{k-1}^{-1} I E_{k-1}^{-1} \cdots E_1^{-1} = \cdots \\
&= E_1 E_1^{-1} = I.
\end{aligned}$$

Samalla tavalla nähdään, että $BA = I$. Siten B on matriisin A käänteismatriisi. □

10.2 Käänteismatriisin määrittäminen

Muuttamalla matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi voidaan nähdä, onko matriisi kääntyvä. Jos matriisi A onnistutaan muuttamaan alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, niin A on kääntyvä eli sillä on käänteismatriisi A^{-1}. Muussa tapauksessa A ei ole kääntyvä.

Jos matriisi on käntyvä, käytetyistä alkeisrivitoimituksista saadaan myös selville, mikä käänteismatriisi on. Oletetaan, että matriisi A on muutettu ykkösmatriisiksi alkeisrivitoimituksilla, joita vastaavat alkeismatriisit $E_1, \dots, E_k$. Nyt

$$E_k \dots E_1 A = I.$$

Tällöin käänteismatriisille pätee

$$\begin{aligned}
A^{-1} = I A^{-1} &= (E_k \dots E_1 A) A^{-1} = E_k \dots E_1 (A A^{-1}) \\
&= E_k \dots E_1 I.
\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että tekemällä samat alkeisrivitoimitukset ykkösmatriisille I päädytään matriisiin A^{-1}.

Matriisin A kääntyvyyden selvittäminen ja käänteismatriisin etsiminen voidaan tehdä yhtä aikaa. Yhdistetään matriisit A ja I matrisiiksi $[A \mid I]$. Tehdään tälle matriisille alkeisrivitoimituksia, joilla A muutetaan redusoiduksi porrasmatriisiksi. Jos matriisi A saadaan muutettua alkeisrivitoimitusten avulla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Kuten edellä todettiin, samat alkeisrivitoimitukset muuttavat ykkösmatriisin I matriisin A käänteismatriisiksi A^{-1}. Siis

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}].$$

Esimerkki 10.8. Tutkitaan, onko matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Muokataan yhdistettyä matriisia

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

alkeisrivitoimituksilla samaan tapaan kuin Gaussin-Jordanin menetelmässä. Tavoitteena on saada vasemmalle puolelle ykkösmatriisi.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3 - 2R_1}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{4}R_2}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 + \frac{5}{2}R_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 - 4R_3}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Koska matriisi A saatiin muutettua alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Lisäksi sen käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entä sitten, jos matriisi ei ole kääntyvä? Kuinka voidaan osoittaa, että matriisista ei saada alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisia? Voidaan osoittaa, että jos alkeisrivitoimitusten avulla saadaan aikaan nollarivi, ei matriisi voi olla riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa. (Todistusta ei esitetä tässä.) Nollarivi on siis merkki siitä, ettei matriisi ei ole kääntyvä.

Esimerkki 10.9. Tutkitaan, onko matriisilla

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Ryhdytään muokkaamaan yhdistettyä matriisia alkeisrivitoimituksilla:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-4R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Koska matriisin B paikalle tuli nollarivi, matriisista B ei saada alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisia. Siten B ei ole kääntyvä.

11 Determinantti

Matriisin determinantti on reaaliluku, joka kertoo matriisin ominaisuuksista. Determinantti on kätevä työkalu esimerkiksi silloin, kun halutaan tietää, onko matriisi kääntyvä. Monet determinanttiin liittyvistä todistuksista ovat kuitenkin niin työläitä, että ne sivuutetaan tässä.

Määritelmä 11.1. Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

a) Jos $n = 1$, niin $\det(A) = a_{11}$.

b) Muussa tapauksessa

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake.

Matriisin A determinantille voidaan käyttää merkintää

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Esimerkki 11.2. Matriisin $A = [4]$ determinantti on $\det(A) = 4$. Matriisin

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

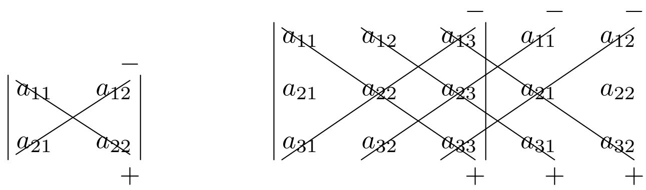
determinantti on puolestaan

$$\det(B) = 1 \cdot \det([4]) - (-1) \cdot \det([2]) = \det([4]) + \det([2]) = 4 + 2 = 6.$$

Määritelmän mukaan 2×2-matriisin determinantti lasketaan seuraavasti:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Sen laskemiseen voi käyttää kuvassa 11.23 esitettyä muistisääntöä. Piirretään matriisin poikki vinoviivat. Samalla viivalla olevat alkiot kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki ja muutoin miinusmerkki. Lopuksi tulot summataan.



Kuva 11.23: Muistisäännöt 2×2-determinantin ja 3×3-determinantin laskemiseksi.

Esimerkki 11.3. Matriisin

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti on

$$\begin{aligned} \det(C) &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (4+2) - 3 \cdot (0+1) + 2 \cdot (0-1) \\ &= -2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -17. \end{aligned}$$

Määritelmän mukaan 3×3-matriisin determinantti lasketaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Tällekin determinantille on olemassa laskemista helpottava muistisääntö (ks. kuva 11.23). Kirjoitetaan matriisin vierelle matriisin ensimmäinen ja toinen sarake. Piirretään kuvion päälle matriisin lävistäjän suuntaisia viivoja sekä vastakkaissuuntaisia viivoja. Samalla viivalla olevat alkiot kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki. Jos viiva on vastakkaissuuntainen, tulee tulon eteen miinusmerkki. Lopuksi tulot lasketaan yhteen.

Lauseen 9.10 nojalla 2×2-matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, jos ja vain jos $ad - bc \neq 0$. Toisaalta matriisin A determinantti on $ad - bc$. Matriisi A on siis kääntyvä, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$. Samanlainen tulos pätee kaikille matriiseille. Sen osoittaminen on työlästä ja jätetään siksi väliin.

Lause 11.4. *Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos* $\det(A) \neq 0$.

11.1 Determinantin kehityskaavat

Determinantin määritelmässä olevat kertoimet otetaan matriisin ensimmäiseltä riviltä. Sanotaan, että determinantti on tällöin kehitetty ensimmäisen rivin suhteen. Yhtä hyvin voidaan käyttää muita rivejä tai jopa muita sarakkeita.

Lause 11.5. *Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Merkitään $A(i,j) = a_{ij}$ kaikilla $i,j \in \{1,\dots,n\}$*

a) Olkoon $i \in \{1,\dots,n\}$. Tällöin

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake. Kyseessä on kehitys rivin i suhteen.

b) Olkoon $j \in \{1,\dots,n\}$. Tällöin

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake. Kyseessä on kehitys sarakkeen j suhteen.

Toisinaan voi säästää vaivaa, jos valitsee viisaasti rivin tai sarakkeen, jonka suhteen determinantin kehittää. Lasketaan matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

determinantti kehittämällä se aluksi kolmannen rivin ja sitten kolmannen sarakkeen suhteen:

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\left(0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= -\Big(0 + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) \Big) = -(0 - 3 - 1) = 4
\end{aligned}$$

Kehityskaavojen plus- ja miinusmerkkien vaihtelu (eli kaavoissa oleva kerroin $(-1)^{i+j}$) saadaan shakkilautaa muistuttavasta kuviosta:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

Matriisin tilalle ajatellaan plus- ja miinusmerkeistä koostuva ruudukko, jonka vasemmassa yläkulmassa on plusmerkki. Jos matriisin alkion kohdalla on plusmerkki, tulee kehityskaavassa alkion eteen plusmerkki. Vastaavasti, jos alkion kohdalla on miinusmerkki, tulee kehityskaavaankin miinusmerkki. Huomaa, että alkion oma etumerkki säilyy joka tapauksessa.

11.2 Determinantin ominaisuuksia

Lause 11.6. *Oletetaan, että A ja B ovat $n \times n$-matriiseja. Tällöin*

a) $\det(A^T) = \det(A)$

b) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Lause 11.7. *Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Tällöin*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Todistus. Oletuksen mukaan matriisi A on kääntyvä, joten sillä on käänteismatriisi A^{-1}. Lauseen 11.6 kohdan b) nojalla

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$$

Toisaalta lauseen 11.4 mukaan $\det(A) \neq 0$, sillä A on kääntyvä. Siten $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. □

Seuraava lause kertoo, miten alkeisrivitoimitusten tekeminen vaikuttaa matriisin determinanttiin.

Lause 11.8. *Oletetaan, että A on neliömatriisi.*

1) Jos matriisi B saadaan matriisista A vaihtamalla kaksi riviä keskenään, niin $\det(B) = -\det(A)$.

2) Jos matriisi B saadaan matriisista A kertomalla jokin rivi reaaliluvulla $t \neq 0$, niin $\det(B) = t\det(A)$.

3) Jos matriisi B saadaan matriisista A lisäämällä johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla k kerrottuna, niin $\det(B) = \det(A)$.

Lauseen 11.6 kohdasta a) seuraa, että determinantin sarakkeet käyttäytyvät täsmälleen samalla tavalla kuin sen rivit. Lauseesta 11.8 saadaan siis seuraavat muistisäännöt:

1) Jos matriisin kaksi riviä (saraketta) vaihtaa keskenään, niin determinantin etumerkki muuttuu:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

2) Jos matriisin rivillä (sarakkeessa) kaikilla alkioilla on yhteinen tekijä, niin tuon yhteisen tekijän voi ottaa determinantin eteen kertoimeksi:
$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

3) Jos matriisin riviin (sarakkeeseen) lisätään jokin toinen rivi (sarake) vakiolla kerrottuna, niin matriisin determinantti ei muutu:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Joidenkin matriisien determinantti on helppo määrittää.

Lause 11.9. *Oletetaan, että A on neliömatriisi. Tällöin*

1) jos matriisissa A on nollarivi (nollasarake), niin $\det(A) = 0$

2) jos matriisissa A on kaksi samaa riviä (samaa saraketta), niin $\det(A) = 0$

3) jos A on kolmiomatriisi (eli kaikki lävistäjän alapuoliset tai yläpuoliset alkiot ovat nollia), niin matriisin A determinantti on lävistäjäalkioiden tulo.

Todistus. Kohdat 1 ja 3 voidaan todistaa käyttämällä kehityskaavoja. Kohta 2 palautuu kohtaan 1 käyttämällä lauseen 11.8 kohtaa 3. □

Esimerkiksi
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 = 108 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 8 \cdot 9 = 0.$$

12 Pistetulo

Avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ voidaan puhua vektorien pituuksista ja vektoreiden välisistä kulmista. Nämä käsitteet yleistetään avaruuteen $\mathbb{R}^n$ pistetulon avulla.

Määritelmä 12.1. Vektoreiden $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n.$$

Esimerkiksi vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ pistetulo on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 3 \cdot 1 + (-2)(-2) + 0 \cdot \sqrt{3} = 7.$$

Huomaa, että pistetulosta tulee aina tulokseksi reaaliluku.

Pistetulolle voidaan todistaa laskusääntöjä.

Lause 12.2. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

b) $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$

c) $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$

Todistus. Todistetaan kohta b) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Merkitään $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ ja $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned}
\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) &= (v_1, \dots, v_n) \cdot (w_1 + u_1, w_2 + u_2, \dots, w_n + u_n) \\
&= v_1(w_1 + u_1) + v_2(w_2 + u_2) + \dots + v_n(w_n + u_n) \\
&= v_1 w_1 + v_1 u_1 + v_2 w_2 + v_2 u_2 + \dots + v_n w_n + v_n u_n \\
&= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n) + (v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n) \\
&= \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}.
\end{aligned}$$

Tässä käytettiin reaalilukujen yhteenlaskun ja kertolaskun osittelulakia. □

Seuraava lause osoittaa, että vektorin pistetulo itsensä kanssa on aina epänegatiivinen. Ainoastaan nollavektorin pistetulo itsensä kanssa on nolla.

Lause 12.3. *Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

a) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$

b) $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$*, jos ja vain jos* $\bar{v} = \bar{0}$.

Todistus. a) Nähdään, että

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \geq 0 + 0 + \dots + 0 = 0,$$

sillä reaaliluvun neliö on aina epänegatiivinen. Tämä todistaa väitteen.

b) "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$. Tällöin $v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = 0$. Koska jokainen yhteenlaskettava on epänegatiivinen, täytyy yhteenlaskettavien olla nollia. Toisin sanoen $v_i^2 = 0$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Tästä seuraa, että $v_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Siten $\bar{v} = (0, 0, \dots, 0) = \bar{0}$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\bar{v} = \bar{0}$. Nyt $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 0$. Siten väite on todistettu.

$\square$

12.1 Vektorin normi

Pistetulon avulla voidaan määritellä avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorin normi eli pituus. Lauseen 12.3 nojalla $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$, joten seuraavassa määritelmässä juurrettava on epänegatiivinen, kuten kuuluu olla.

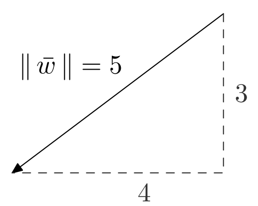
Määritelmä 12.4. Vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli pituus on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

Määritelmästä seuraa, että $\|\bar{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$. Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = (1/2, 3, -2, 0)$ normi on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{(1/2)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{53}{4}} = \frac{\sqrt{53}}{2}.$$

Tason vektoreiden normia voidaan havainnollistaa Pythagoraan lauseen avulla. Kuvassa 12.24 on esitetty vektori $\bar{w} = (-4, -3)$. Sen pituus on Pythagoraan lauseen nojalla $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Pituuden geometrinen tulkinta antaa siis saman tuloksen kuin määritelmä 12.4.



Kuva 12.24: Vektorin $\bar{w}$ normi eli pituus.

Vektorin normi on aina epänegatiivinen ja nollavektori on ainoa vektori, jonka normi on nolla.

Lause 12.5. *Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

a) $\|\bar{v}\| \geq 0$

b) $\|\bar{v}\| = 0$*, jos ja vain jos* $\bar{v} = 0$.

Todistus. Tulokset seuraavat suoraan neliöjuuren ominaisuuksista ja lauseesta 12.3.

a) Määritelmän mukaan $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$. Neliöjuuren arvo on aina epänegatiivinen, joten $\|\bar{v}\| \geq 0$.

b) Huomataan, että $\|\bar{v}\| = 0$, jos ja vain jos juurrettava $\bar{v} \cdot \bar{v}$ on nolla. Lauseen 12.3 nojalla taas $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$. Tämä todistaa väitteen.

□

Lause 12.6. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *ja* $c \in \mathbb{R}$*. Tällöin* $\|c\bar{v}\| = |c|\|\bar{v}\|$*.*

Todistus. Pistetulon ominaisuuksien perusteella

$$\|c\bar{v}\| = \sqrt{c\bar{v} \cdot c\bar{v}} = \sqrt{c(\bar{v} \cdot c\bar{v})} = \sqrt{c^2(\bar{v} \cdot \bar{v})} = |c|\sqrt{(\bar{v} \cdot \bar{v})} = |c|\|\bar{v}\|.$$

□

Määritelmä 12.7. Vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ on *yksikkövektori*, jos sen normi on yksi eli

$$\|\bar{u}\| = 1.$$

Esimerkiksi vektorit $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ sekä vektorit $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$ ovat yksikkövektoreita.

Esimerkki 12.8. Etsitään yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen vektorin $\bar{v} = (2, -1, 0)$ kanssa. Vektorin $\bar{v}$ normi on $\|\bar{v}\| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$. Jos vektori $\bar{v}$ kerrotaan skalaarilla $1/\sqrt{5}$, saadaan vektori $(1/\sqrt{5})\bar{v}$, jonka pituus on lauseen 12.6 nojalla

$$(1/\sqrt{5}) \cdot \|\bar{v}\| = 1/\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 1.$$

Lisäksi vektorit $\bar{v}$ ja $(1/\sqrt{5})\bar{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

Lause 12.9. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$*. Tällöin vektori* $\dfrac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$ *on yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen* $\bar{v}$*:n kanssa.*

Todistus. Väite seuraa lauseesta 12.6 samalla tavalla kuin esimerkissä 12.8. □

Normin avulla voidaan määritellä vektorien välinen etäisyys.

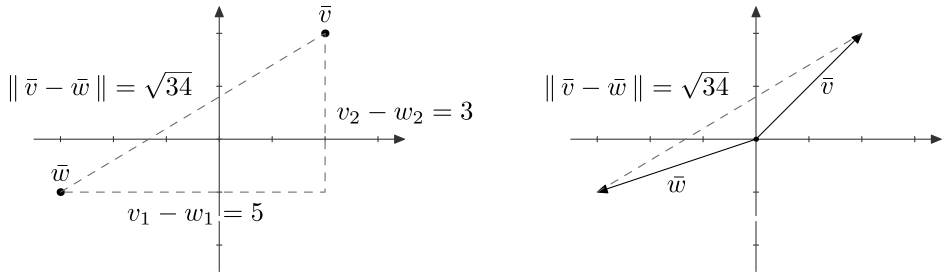
Määritelmä 12.10. Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen etäisyys on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\|.$$

Esimerkki 12.11. Vektoreiden $\bar{v} = (2, 2)$ ja $\bar{w} = (-3, -1)$ välinen etäisyys on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\| = \|(2 - (-3), 2 - (-1))\| = \|(5, 3)\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}\,.$$

Sitä on havainnollistettu kahdella eri tavalla kuvassa 12.25.



Kuva 12.25: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen etäisyys.

Lause 12.12 (Schwarzin epäyhtälö)**.** *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *ja* $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$*. Tällöin*

$$|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

Todistus. Schwarzin epäyhtälöä tarvitaan tässä vaiheessa lähinnä lemman 12.13 todistamiseen. Lauseen todistus on kuitenkin melko tekninen, joten sitä lykätään kurssin toiseen osaan. □

12.2 Vektorien välinen kulma ja kohtisuoruus

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ kahden vektorin välinen kulma määritetään pistetulon avulla. Vektorien välisen kulman määrittelyyn tarvitaan seuraavaa lemmaa.

Lemma 12.13. *Oletetaan, että* $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$*. Tällöin*

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \ \|\bar{w}\|} \leq 1.$$

Todistus. Schwarzin epäyhtälön 12.12 mukaan $|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|$. Tästä seuraa, että

$$-\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \leq \bar{v} \cdot \bar{w} \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

Jakamalla näin saadut epäyhtälöt positiivisella luvulla $\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|$ saadaan

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \ \|\bar{w}\|} \leq 1.$$

□

Kosinifunktio on määritelty niin, että jokaista lukua $a \in [-1, 1]$ vastaa täsmälleen yksi sellainen kulma α, että $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ja $\cos \alpha = a$. Edellisen lemman nojalla voidaan siis asettaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 12.14. Vektorien $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ välinen kulma on se kulma α, jolle pätee $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ja

$$\cos \alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \ \|\bar{w}\|}.$$

Esimerkiksi vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{8}}.$$

Lisäksi täytyy päteä $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Näin vektorien väliseksi kulmaksi saadaan $\alpha \approx 46{,}65^\circ$.

Tason vektorien tapauksessa vektorien välisen kulman määritelmä vastaa geometrista käsitystämme vektorien välisestä kulmasta. Kosinilauseen mukaan kuvan 12.26 kolmiossa

$$\|\bar{w} - \bar{v}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \cos \alpha.$$

Toisaalta normin määritelmän nojalla

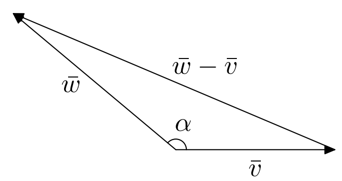
$$\begin{aligned}\|\bar{w} - \bar{v}\|^2 &= (\bar{w} - \bar{v}) \cdot (\bar{w} - \bar{v}) = \bar{w} \cdot \bar{w} - \bar{w} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{v} \\ &= \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2.\end{aligned}$$

Siten

$$\|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \cos \alpha = \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2$$

ja edelleen

$$\cos \alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}.$$



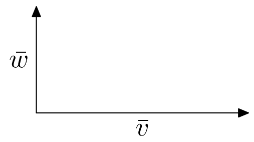
Kuva 12.26: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma kosinilauseen näkökulmasta.

Määritelmä 12.15. Vektorit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$. Tällöin merkitään $\bar{v} \perp \bar{w}$.

Yleensä kahden olion ajatellaan olevan kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden välinen kulma on 90°. Tämä pitää paikkansa myös vektoreiden tapauksessa. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Määritelmän mukaan vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on 90°, jos ja vain jos

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \, \|\bar{w}\|} = \cos 90^\circ = 0.$$

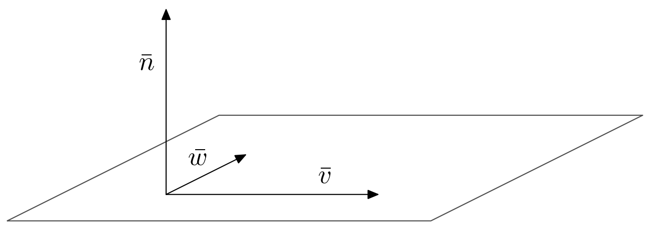
Tämä puolestaan pätee, jos ja vain jos $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$. Siten vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on 90°, jos ja vain jos $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$.



Kuva 12.27: Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Pistetulon sovellus: Tason normaalimuotoinen yhtälö

Vektorin sanotaan olevan kohtisuorassa tasoa vastaan, jos se on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan. Tällaista vektoria kutsutaan tason *normaaliksi* (ks. kuva 12.28).



Kuva 12.28: Tason normaali $\bar{n}$.

Oletetaan, että T on avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, joka kulkee pisteen P kautta ja jolla on normaali $\bar{n}$. Voidaan osoittaa, että piste $Q = (x, y, z)$ on tasossa T, jos ja vain jos

$$\bar{n} \cdot (\bar{q} - \bar{p}) = 0,$$

missä $\bar{q} = \overline{OQ}$ ja $\bar{p} = \overline{OP}$. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 12.29.

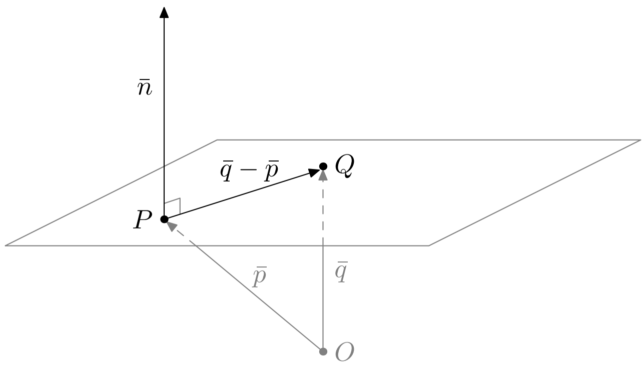
Edellä esitettyä yhtälöä kutsutaan tason T *normaalimuotoiseksi yhtälöksi*. Piste Q on tasossa T, jos ja vain jos pisteen paikkavektori $\bar{q}$ toteuttaa yhtälön.

Esimerkki 12.16. Oletetaan, että taso T kulkee pisteen $P = (6, 0, 1)$ kautta ja sillä on normaali $\bar{n} = (1, 2, 3)$. Tason T normaalimuotoinen yhtälö on tällöin

$$(1, 2, 3) \cdot (\bar{q} - (6, 0, 1)) = 0.$$

Tasossa T ovat siis ne pisteet Q, joiden paikkavektori $\bar{q}$ toteuttaa edellä esitetyn yhtälön. Toisin sanoen

$$T = \{\bar{q} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 2, 3) \cdot (\bar{q} - (6, 0, 1)) = 0\}.$$



Kuva 12.29: Tason T normaalimuotoisen yhtälön havainnollistus.

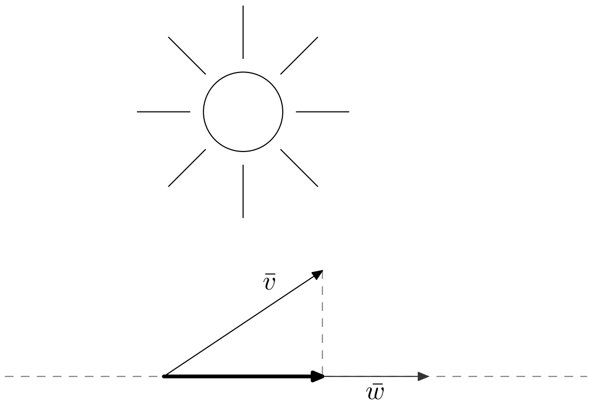
Kirjoitetaan taso vielä hiukan toisenlaisessa muodossa. Merkitään $\bar{q} = (x, y, z)$, missä $x, y, z \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}(1,2,3) \cdot (\bar{q} - (6,0,1)) &= (1,2,3) \cdot (x-6, y-0, z-1) \\ &= x - 6 + 2y + 3z - 3 \\ &= x + 2y + 3z - 9,\end{aligned}$$

joten voidaan kirjoittaa $T = \{\bar{q} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z - 9 = 0\}$.

12.3 Projektio

Ryhdymme määrittelemään vektorin $\bar{v}$ projektiota vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle $\operatorname{span}(\bar{w})$ (eli vektorin $\bar{w}$ suuntaiselle suoralle). Voidaan ajatella, että projektio on vektorin $\bar{v}$ heittämä varjo, kun aurinko paistaa kohtisuoraan vektoria $\bar{w}$ vastaan kuten kuvassa 12.30.



Kuva 12.30: Projektion havainnollistus.

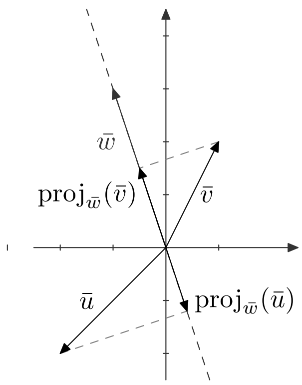
Määritelmä 12.17. Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ *projektio* vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Esimerkki 12.18. Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = (1, 2)$ projektio vektorin $\bar{w} = (-1, 3)$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\text{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{5}{10}(-1, 3) = \frac{1}{2}(-1, 3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Projektio on esitety kuvassa 12.31.



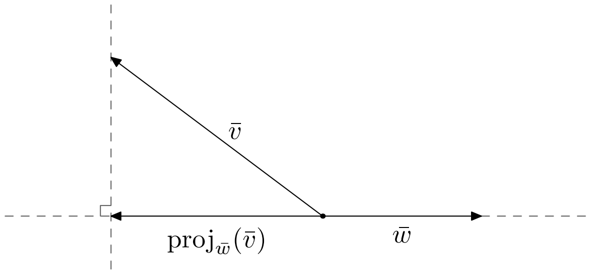
Kuva 12.31: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ projektiot vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

Vektorin $\bar{u} = (-2, -2)$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on puolestaan

$$\text{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{-4}{10}(-1, 3) = -\frac{2}{5}(-1, 3) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right).$$

Määritelmästä nähdään, että $\text{proj}_{\bar{w}}(v)$ on aina yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa. (Vektoria $\bar{w}$ kerrotaan nimittäin skalaarilla $(\bar{v} \cdot \bar{w})/(\bar{w} \cdot \bar{w})$.) Ei ole myöskään vaikea osoittaa, että vektorit $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja $\bar{w}$ ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vektorin projektion voi määrittää myös geometrisesti (ks. kuva 12.32). Piirretään vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ alkamaan samasta pisteestä ja piirretään vektorin $\bar{w}$ suuntainen suora. Projektio $\text{proj}_{\bar{w}}(v)$ löydetään piirtämällä suora, joka on kohtisuorassa vektorin $\bar{w}$ suuntaista suoraa vastaan ja kulkee vektorin $\bar{v}$ kärjen kautta.

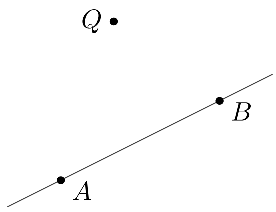


Kuva 12.32: Vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

Projektion sovellus: Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen etäisyys suorasta voidaan määrittää projektion avulla. Pisteen Q etäisyys suorasta $S = \{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ on kaikkein lyhin välimatka, joka voi olla pisteen Q ja suoran S pisteen välillä. Täsmällisesti ilmaistuna pisteen Q etäisyys suorasta S on $\min\{d(\bar{q}, \bar{a}) \mid \bar{a} \in S\}$, missä $\bar{q}$ on pisteen Q paikkavektori.

Tutkitaan esimerkin avulla, kuinka projektiota voidaan käyttää etäisyyden määrittämisessä. Tarkkoja todistuksia ei esitetä. Määritetään pisteen $Q = (4, -1, 9)$ etäisyys suorasta S, joka kulkee pisteiden $A = (2, -3, 5)$ ja $B = (4, 1, 7)$ kautta (ks. kuva 12.33).



Kuva 12.33: Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora S.

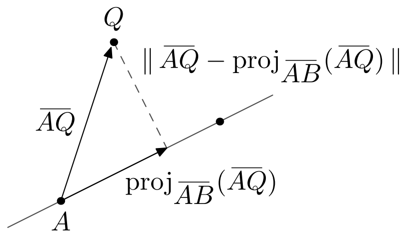
Määritetään ensin vektori jostakin suoran pisteestä tutkittavaan pisteeseen. Esimerkiksi vektori

$$\overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA} = (2, 2, 4)$$

käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan suoran suuntainen vektori, kuten vaikkapa vektori $\overline{AB} = (2, 4, 2)$.

Vektorin $\overline{AQ}$ projektio suoralle S on

$$\text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ}) = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AB}}{\overline{AB} \cdot \overline{AB}}\overline{AB} = \frac{20}{24}(2, 4, 2) = \frac{5}{6}(2, 4, 2).$$



Kuva 12.34: Pisteen Q etäisyys suorasta S.

Erotus $\overline{AQ} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})$ on kohtisuorassa suoraa S vastaan. Lasketaan erotus:

$$\begin{aligned}
\overline{AQ} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ}) &= (2,2,4) - \frac{5}{6}(2,4,2) = \frac{6}{6}(2,2,4) - \frac{5}{6}(2,4,2) \\
&= \frac{1}{6}(12-10, 12-20, 24-10) = \frac{1}{6}(2,-8,14) \\
&= \frac{1}{3}(1,-4,7)
\end{aligned}$$

Koska $\overline{AQ} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})$ on kohtisuorassa suoraa S vastaan, antaa erotusvektorin pituus pisteen Q etäisyyden suorasta:

$$\|\overline{AQ} - \text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})\| = \frac{1}{3}\|(1,-4,7)\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+16+49} = \frac{1}{3}\sqrt{66}.$$

Siten pisteen Q etäisyys suorasta S on $\frac{1}{3}\sqrt{66}$.

12.4 Ortogonaalinen ja ortonormaali kanta

Määritelmä 12.19. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuden W kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on *ortogonaalinen*, jos

$$\bar{w}_i \cdot \bar{w}_j = 0 \quad \text{kaikilla } i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}, \text{ missä } i \neq j.$$

Toisin sanoen kantavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on *ortonormaali*, jos se on ortogonaalinen ja lisäksi

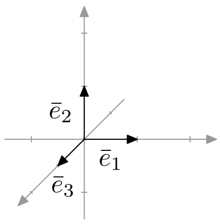
$$\|\bar{w}_i\| = 1 \quad \text{kaikilla } i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Toisin sanoen kantavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja niiden normi on yksi.

Esimerkki 12.20. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta $\mathcal{E}_n = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ on ortonormaali. Huomataan nimittäin, että

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0, \quad \text{jos } i \neq j.$$

Lisäksi $\|\bar{e}_i\| = 1$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

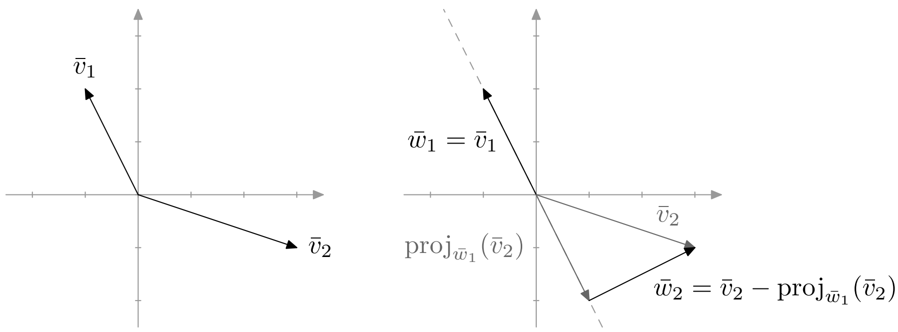


Kuva 12.35: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta $\mathcal{E}_3 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ on ortonormaali.

Ortogonaaliset kannat ovat monissa tilanteissa hyvin käyttökelpoisia. Mistä tahansa kannasta voidaan muodostaan ortogonaalinen kanta projektiota apuna käyttäen. Seuraavassa esimerkissä näytetään, miten tämä tapahtu avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Asiaan palataan tarkemmin kurssin toisessa osassa.

Esimerkki 12.21. Merkitään $\bar{v}_1 = (-1, 2)$ ja $\bar{v}_2 = (3, -1)$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. (Tämän todistaminen jätetään lukijalle.)

Etsitään ortogonaalinen kanta muodostamalla uusi jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ valitsemalla $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$ ja $\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2)$. Nyt vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat ortogonaaliset kuten luvussa 12.3 todettiin. Lisäksi $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, minkä todistaminen jätetään jälleen lukijalle.

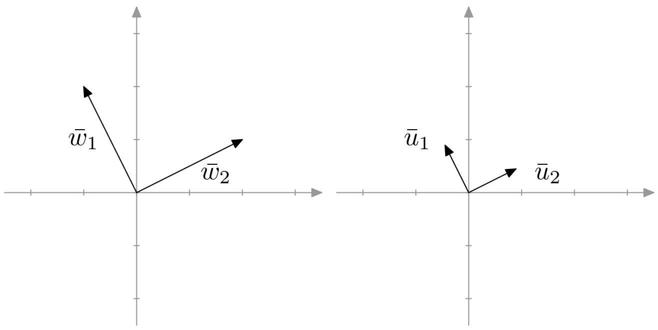


Kuva 12.36: Kannan $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ muuttaminen ortogonaaliseksi kannaksi $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$.

Näin saadusta ortogonaalisesta kannasta voidaan vielä muodostaa ortonormaali kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ valitsemalla

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\|\bar{w}_1\|}\bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) \quad \text{ja} \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{\|\bar{w}_2\|}\bar{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

Jono $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaali kanta.



Kuva 12.37: Ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ja ortonormaali kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

Vektorin koordinaatit ortonormaalin kannan suhteen saadaan pistetulon avulla.

Lause 12.22. *Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k)$ on aliavaruuden W ortonormaali kanta. Oletetaan, että $\bar{w} \in W$. Tällöin vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat $\bar{w} \cdot \bar{u}_1$, $\bar{w} \cdot \bar{u}_2, \dots, \bar{w} \cdot \bar{u}_k$ eli*

$$\bar{w} = (\bar{w} \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{w} \cdot \bar{u}_2)\bar{u}_2 + \cdots + (\bar{w} \cdot \bar{u}_k)\bar{u}_k\,.$$

Todistus. Tutkitaan vektorin $\bar{w} \in W$ koordinaatteja kannan S suhteen. Olkoot koordinaatit $a_1, \dots, a_k$ eli $\bar{w} = a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\bar{w} \cdot \bar{w}_1 &= (a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k) \cdot \bar{w}_1 \\
&= a_1(\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1) + a_2(\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_1) + \cdots + a_k(\bar{w}_k \cdot \bar{w}_1) \\
&= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 0 = a_1.
\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että $\bar{w} \cdot \bar{w}_i = a_i$ kaikilla $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen saadaan siis laskemalla $\bar{w}$:n pistetulo kantavektorien kanssa. □

Esimerkki 12.23. Määritetään vektorin $\bar{w} = (2, 9, -7)$ koordinaantit ortonormaalin kannan $\mathcal{E}_3 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ suhteen käyttäen edellä osoitettua tulosta. Koska

$$\begin{aligned}
\bar{w} \cdot \bar{e}_1 &= (2, 9, -7) \cdot (1, 0, 0) = 2, \\
\bar{w} \cdot \bar{e}_2 &= (2, 9, -7) \cdot (0, 1, 0) = 9, \\
\bar{w} \cdot \bar{e}_3 &= (2, 9, -7) \cdot (0, 0, 1) = -7,
\end{aligned}$$

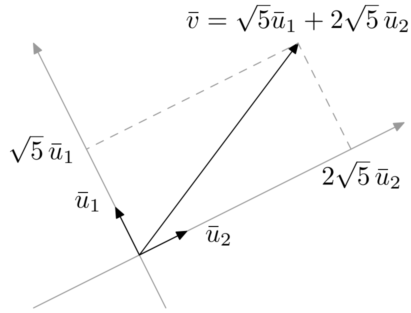
saadaan $\bar{w} = 2\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3$. (Tämän olisimme toki voineet päätellä suoraankin.)

Esimerkki 12.24. Tarkastellaan esimerkissä 12.20 muodostettua avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaalia kantaa $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, jossa

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2), \qquad \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

Vektorin $\bar{v} = (3, 4)$ koordinaatit tämän kannan suhteen ovat

$$\bar{v} \cdot \bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((3,4) \cdot (-1,2)\Big) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5},$$
$$\bar{v} \cdot \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((3,4) \cdot (2,1)\Big) = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$



Kuva 12.38: Vektorin $\bar{v}$ koordinaantit ortonormaalin kannan $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ suhteen.

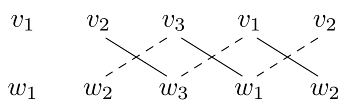
13 Ristitulo

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreille voidaan määritellä ristitulo. Ristitulon tulos on avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori. Ristitulosta on hyötyä esimerkiksi silloin, kun tarvitaan vektori, joka on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Määritelmä 13.1. Vektorien $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ *ristitulo* on vektori

$$\bar{v} \times \bar{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1).$$

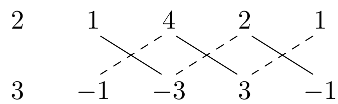
Ristitulon $\bar{v} \times \bar{w}$ laskemiseen voi käyttää kuvassa 13.39 esitettyä laskusääntöä. Yhtenäisellä viivalla yhdistettyjen komponenttien tulosta vähennetään katkoviivalla yhdistettyjen komponenttien tulo.



Kuva 13.39: Ristitulon $\bar{v} \times \bar{w}$ laskeminen.

Esimerkki 13.2. Merkitään $\bar{a} = (2, 1, 4)$ ja $\bar{b} = (3, -1, -3)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1),\ 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-3),\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) \\ &= (1, 18, -5). \end{aligned}$$



Kuva 13.40: Ristitulon $\bar{a} \times \bar{b}$ laskeminen.

Ristitulolle saadaan toinen muistisääntö determinantin avulla. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ristitulo saadaan laskemalla determinantti

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Tässä $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$ ja $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Tarkalleen ottaen determinantin alkiot eivät voi olla vektoreita. Kyseessä on kuitenkin vain muistisääntö, ja vektoreiden $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ ajatellaan käyttäytyvän determinanttia laskettaessa reaalilukujen tavoin.

Esimerkiksi vektoreiden $\bar{a} = (2, 1, 4)$ ja $\bar{b} = (3, -1, -3)$ ristitulo on

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 12\bar{j} - 2\bar{k} - 3\bar{k} + 4\bar{i} + 6\bar{j} = \bar{i} + 18\bar{j} - 5\bar{k} = (1, 18, -5).$$

Ristitulon avulla voidaan löytää vektori, joka on kohtisuorassa kahta vektoria vastaan.

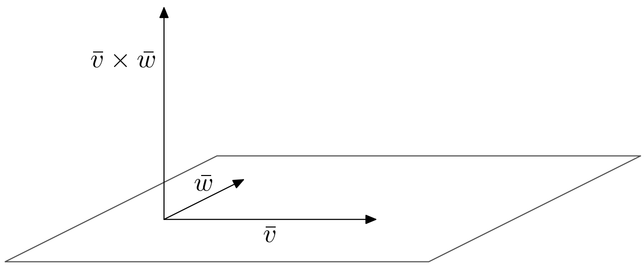
Lause 13.3. *Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin*

$$(\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{v} \quad ja \quad (\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{w}.$$

Todistus. Huomataan, että

$$\begin{aligned} (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{v} &= (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1) \cdot (v_1, v_2, v_3) \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)v_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)v_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)v_3 \\ &= v_2w_3v_1 - v_3w_2v_1 + v_3w_1v_2 - v_1w_3v_2 + v_1w_2v_3 - v_2w_1v_3 = 0. \end{aligned}$$

Siten vektorit $(\bar{v} \times \bar{w})$ ja $\bar{v}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väitteen toinen osa osoitetaan samalla tavalla. □



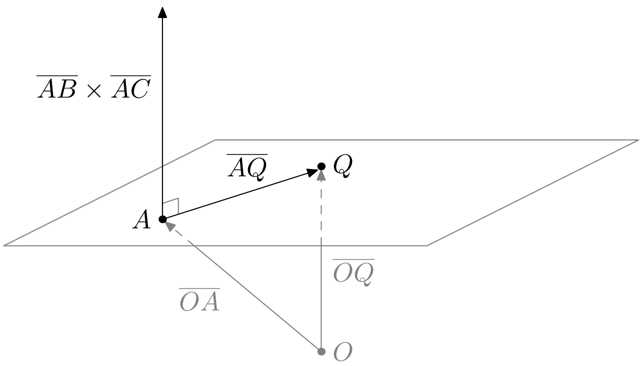
Kuva 13.41: Ristitulo $\bar{v} \times \bar{w}$ on kohtisuorassa vektoria $\bar{v}$ ja vektoria $\bar{w}$ vastaan.

Ristitulon avulla voidaan löytää tason normaali (eli vektori, joka on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan). Tästä on hyötyä tason normaalimuotoisen yhtälön määrittämisessä.

Esimerkki 13.4. Määritetään normaalimuotoinen yhtälö tasolle T, joka kulkee pisteiden $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ ja $C = (-2, 0, 1)$ kautta. Tätä varten tarvitaan tason T normaali. Vektorien $\overline{AB} = (-1, 2, 2)$ ja $\overline{AC} = (-2, -1, 1)$ ristitulo

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (4, -3, 5)$$

käy edellisen lauseen nojalla tähän tarkoitukseen.



Kuva 13.42: Tason T normaalimuotoisen yhtälön määrittäminen.

Lisäksi tarvitaan vektori jostakin tason pisteestä pisteeseen $Q = (x, y, z)$. Valitaan vektori $\overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA} = (x, y-1, z)$. Tason T normaalimuotoiseksi yhtälöksi saadaan $(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AQ} = 0$ eli

$$(4, -3, 5) \cdot (x, y-1, z) = 0.$$

Laskemalla pistetulo saadaan yhtälö muotoon

$$4x - 3y + 5z + 3 = 0.$$

Siten $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 3y + 5z + 3 = 0\}$.

Esimerkki 13.5. Pisteen etäisyys tasosta voidaan määrittää ristitulon ja projektion avulla. Merkitään $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ ja $C = (-2, 0, 1)$. Oletetaan, että taso T kulkee pisteiden A, B ja C kautta. Määritetään pisteen $D = (1, 2, 3)$ etäisyys tasosta T (ks. kuva 13.43).

Tason suuntaisten vektoreiden $\overline{AB} = (-1, 2, 2)$ ja $\overline{AC} = (-2, -1, 1)$ ristitulo

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (4, -3, 5)$$

on tason normaali. Lisäksi tarvitaan vektori jostakin tason pisteestä pisteeseen $D = (1, 2, 3)$. Valitaan vektori

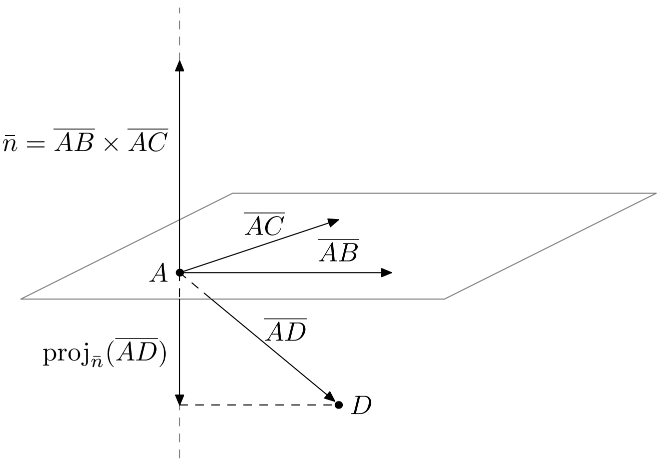
$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (1, 1, 3).$$

Vektorin $\overline{AD}$ projektio normaalin $\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD}) = \frac{\overline{AD} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}}\, \bar{n} = \frac{16}{50}\,(4, -3, 5) = \frac{8}{25}\,(4, -3, 5).$$

Tämän projektion normi (eli pituus) on pisteen P etäisyys tasosta T:

$$\|\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD})\| = \frac{8}{25}\,\|(4, -3, 5)\| = \frac{8}{25}\sqrt{16 + 9 + 25} = \frac{8}{25}\sqrt{50} = \frac{8}{5}\sqrt{2}.$$



Kuva 13.43: Pisteen D etäisyys tasosta T.

Käydään vielä läpi muutamia ristituloon liittyviä laskusääntöjä.

Lause 13.6. *Oletetaan, että* $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ *ja* $c \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

a) $\bar{v} \times \bar{w} = -(\bar{w} \times \bar{v})$ *(antikommutointi)*

b) $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$ *(osittelulaki)*

c) $(\bar{v} + \bar{w}) \times \bar{u} = \bar{v} \times \bar{u} + \bar{w} \times \bar{u}$ *(osittelulaki)*

d) $c(\bar{v} \times \bar{w}) = (c\bar{v}) \times \bar{w} = \bar{v} \times (c\bar{w})$

e) $\bar{v} \times \bar{v} = \bar{0}$

f) $\bar{0} \times \bar{v} = \bar{0}$ *ja* $\bar{v} \times \bar{0} = \bar{0}$

g) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

Todistus. Lauseen todistus on suoraviivainen ja käyttää ainoastaan ristitulon määritelmää. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Ristitulolla on myös pistetuloon liittyviä laskusääntöjä.

Lause 13.7. *Oletetaan, että* $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. *Tällöin*

a) $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}$

b) $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$

c) $\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2$ *(Lagrangen identiteetti)*

Todistus. Osoitetaan kohta c) (eli Lagrangen identiteetti) ja jätetään muut kohdat harjoitustehtäviksi. Käyttämällä lauseen 13.6 kohtaa g) ja lauseen 13.7 kohtaa a) saadaan

$$\begin{aligned}
\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = ((\bar{v} \times \bar{w}) \times \bar{v}) \cdot \bar{w} \\
&= ((\bar{v} \cdot \bar{v})\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}) \cdot \bar{w} = (\|\bar{v}\|^2\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}) \cdot \bar{w} \\
&= \|\bar{v}\|^2(\bar{w} \cdot \bar{w}) - (\bar{v} \cdot \bar{w})(\bar{v} \cdot \bar{w}) = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2.
\end{aligned}$$

Siten Lagrangen identiteetti pätee. $\square$

Lause 13.8. *Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Jos $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$, niin*

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha,$$

missä α on vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma.

Todistus. Todistuksessa käytetään Lagrangen identiteettiä (lause 13.7). Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan $\cos \alpha = (\bar{v} \cdot \bar{w})/(\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|)$, ja lisäksi pätee $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Nyt Lagrangen identiteetistä saadaan

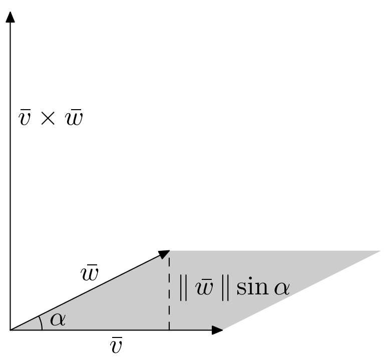
$$\begin{aligned}
\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\cos \alpha \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|)^2 \\
&= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - \cos^2 \alpha \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2(1 - \cos^2 \alpha) \\
&= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 \sin^2 \alpha = (\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha)^2.
\end{aligned}$$

Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan $0° \leq \alpha \leq 180°$, mistä seuraa, että $\sin \alpha \geq 0$. Lisäksi vektorien normit ovat aina epänegatiivisia. Siten $\|\bar{v} \times \bar{w}\| \geq 0$ ja $\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha \geq 0$. Saadusta yhtälöstä voidaan näin ollen päätellä, että

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha.$$

Tämä todistaa väitteen. $\square$

Edellisestä lauseesta seuraa, että ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan ala (ks. kuva 13.44). Oletetaan, että vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on α. Tällöin suunnikkaan korkeus on $\|\bar{w}\| \sin \alpha$. Näin suunnikkaan pinta-alaksi saadaan $\|\bar{w}\| \sin \alpha \cdot \|\bar{v}\| = \|\bar{v} \times \bar{w}\|$.



Kuva 13.44: Ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan ala.

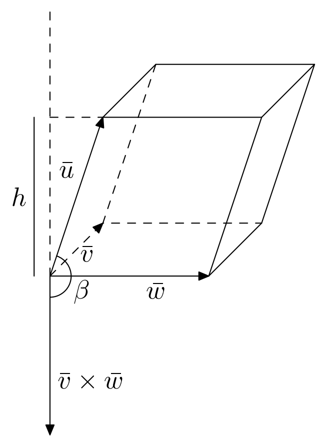
Ristitulon avulla voidaan määrittää myös suuntaissärmiön tilavuus. Vektoreiden $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ määräämään suuntaissärmiön tilavuus on pohjan pinta-alan $\|\bar{v} \times \bar{w}\|$ ja korkeuden h tulo (ks. kuva 13.45). Pohjan pinta-alan tiedetään edellisen kappaleen perusteella olevan $\|\bar{v} \times \bar{w}\|$. Määritetään vielä korkeus h. Olkoon β vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v} \times \bar{w}$ välinen kulma. Nyt

$$h = \|\bar{u}\| \, |\cos(180^\circ - \beta)| = \|\bar{u}\| \, |\cos \beta| \, .$$

Siten tilavuus on

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| \|\bar{u}\| \, |\cos \beta| = \Big| \|\bar{v} \times \bar{w}\| \|\bar{u}\| \cos \beta \Big| = \Big| (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{u} \Big| .$$

Viimeisessä välivaiheessa käytettiin vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v} \times \bar{w}$ välisen kulman määritelmää. Suunnikkaan tilavuus on siis niin kutsutun *skalaarikolmitulon* itseisarvo.



Kuva 13.45: Vektoreiden $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ määräämään suuntaissärmiön tilavuus.