

1. Erään yhtälöryhmän matriisi muutettiin porrasmatriisiksi. Montako ratkaisua yhtälöryhmällä on, jos porrasmatriisi on

$$(a) \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (b) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \quad (c) \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] ?$$

2. Taso kulkee pisteiden $A = (1, -1, 0)$, $B = (-2, 1, 0)$ ja $C = (0, 0, 2)$ kautta. Kuuluuko piste $D = (4, -3, 6)$ tasoon?
3. Eräälle neliömatriisille A pätee $A^2 = O$. Osoita, että matriisi $I - A$ on kääntövä ja että sen käänteismatriisi on $A + I$.
4. Osoita esimerkiksi determinantin avulla, että edellisen tehtävän matriisi A ei ole kääntövä.
5. Matriisin $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ratkaise yhtälöryhmä $A\bar{x} = \bar{b}$, kun

$$(a) \bar{b} = (2, -1, 1, 2) \quad (b) \bar{b} = \bar{0}.$$

6. Virittävätkö vektorit $\bar{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\bar{v}_2 = (3, -2, 2)$ ja $\bar{v}_3 = (-4, 1, 4)$ avaruuden \mathbb{R}^3 ?
7. Onko edellisen tehtävän vektorien muodostama jono vapaa?
8. Mikä on tehtävän 6 vektorien virittämän aliavaruuden dimensio?
9. Neliömatriisin A sarakkeina ovat eräät vektorit $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \in \mathbb{R}^3$. Matriisin A determinantti on 3. Onko vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ avaruuden \mathbb{R}^3 kanta?
10. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.

11. Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Oletetaan, että $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$. Osoita, että vektorit \bar{v} ja \bar{w} ovat lineaarisesti riippumattomat.