HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Harjoitus 5
10.6.2013

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: **to 13.6.**

Tehtäväsarja I

1. Määritä pistetulo $\bar{u} \cdot \bar{w}$, normi $\|\bar{u}\|$ ja vektorin $\bar{u}$ kanssa yhdensuuntaiset yksikkövektorit, jos

   (a) $\bar{u} = (-1, 2)$ ja $\bar{w} = (3, 1)$ (b) $\bar{u} = (1, 2, 3)$ ja $\bar{w} = (2, 3, 1)$.

   Piirrä (a)-kohdan tilanteesta havainnollistava kuva.

2. Määritä vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma, jos

   (a) $\bar{u} = (3, 0)$ ja $\bar{w} = (-1, 1)$ (b) $\bar{u} = (3, 4, -1)$ ja $\bar{w} = (1, -1, 1)$.

   Piirrä (a)-kohdan tilanteesta havainnollistava kuva.

Seuraavissa tehtävissä oletetaan, että $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ ja $\bar{v} \cdot \bar{w} = -1$.

3. Merkitään $\bar{a} = 3\bar{v} - \bar{w}$ ja $\bar{b} = \bar{v} + \bar{w}$. Määritä $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

4. Määritä $\|\bar{v} + 2\bar{w}\|$.

Tehtäväsarja II

Merkitään $\bar{w} = (1, -1)$ ja $\bar{v} = (3, -1)$.

5. Laske projektion määritelmän perusteella vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

6. Piirrä kuva vektoreista $\bar{v}$, $\bar{w}$ sekä projektiosta $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Piirrä kuvaan myös erotusvektori $\bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$.

Tehtäväsarja III

7. Laske $\bar{u} \times \bar{w}$, jos

   (a) $\bar{u} = (0, 1, 1)$ ja $\bar{w} = (3, -1, 2)$ (b) $\bar{u} = (3, -1, 2)$ ja $\bar{w} = (0, 1, 1)$.

8. Merkitään $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, -3)$ ja $C = (0, 0, -2)$. Määritä pisteiden A, B ja C kautta kulkevan tason T normaalimuotoinen yhtälö ja tutki, onko piste $D = (1, 2, 1)$ tasossa. (Vihje: Katso mallia korjatun materiaalin esimerkeistä 14.6 ja 13.17.)

Tehtäväsarja IV

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä käsittelee kurssin ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

9. Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $\bar{w}$ on yksikkövektori, ja merkitään $\bar{u} = \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Tarkista projektion määritelmän ja pistetulon laskusääntöjen avulla, että

$$(\bar{v} - \bar{u}) \perp \bar{u}.$$

Vihje. Merkinnät helpottuvat, kun merkitset vaikkapa $\bar{v} \cdot \bar{w} = a \in \mathbb{R}$.

10. Sanotaan, että matriisit A ja B *kommutoivat*, jos pätee $AB = BA$.

Tutkitaan 2×2-matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita, että ainoat joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisit, jotka kommutoivat kaikkien muiden 2×2 -matriisien kanssa, ovat skalaarimatriisit

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{missä } a \in \mathbb{R}.$$

Vihje: Oleta, että matriisi A kommutoi kaikkien joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisien kanssa. Tällöin A:n täytyy kommutoida muun muassa matriisien

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kanssa. Mitä voit tällöin päätellä matriisista A?