

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 10.6.

Tehtäväsarja I

Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Tutki, onko matriisi A kääntyvä. Jos on, määritä sen käänteismatriisi A^{-1} .
2. Tutki, onko matriisi B kääntyvä. Jos on, määritä sen käänteismatriisi B^{-1} .
3. Toinen matriiseista A ja B on kääntyvä. Kirjoita sen käänteismatriisi alkeismatriisien tulona.
4. Oletetaan, että M on matriiseista A ja B se, joka on kääntyvä. Ratkaise yhtälöryhmät $M\bar{x} = \bar{b}_1$ ja $M\bar{x} = \bar{b}_2$, missä $\bar{b}_1 = (1, 2, 3)$ ja $\bar{b}_2 = (-7, 5, 2)$, käyttäen hyväksi käänteismatriisia M^{-1} .

Tehtäväsarja II

5. Laske $\det(A)$ ja päättele, onko matriisi A kääntyvä, kun

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Oletetaan, että A ja B ovat 4×4 -matriiseja, joille pätee $\det(A) = 3$ ja $\det(B) = -2$. Määritä

$$(a) \quad \det(AB) \quad (b) \quad \det(B^{-1}A) \quad (c) \quad \det(2A) \quad (d) \quad \det(-3B^T).$$

7. Laske matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \\ -3 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

determinantti muuttamalla se ensin porrasmatriisiksi. (Katso mallia korjatun kurssimateriaalin esimerkistä 11.9.) Onko matriisi kääntyvä?

Tehtäväsarja III

Oletetaan, että A , B ja C ovat samankokoisia neliömatriiseja.

8. Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä. Osoita, että tällöin myös matriisi AB on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $B^{-1}A^{-1}$.
9. Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Osoita, että jos $AB = AC$, niin $B = C$.
10. Oletetaan, että $A \neq O$. Osoita, että ehdosta $AB = AC$ ei välttämättä seuraa $B = C$. (Vihje: Keksi jokin vastaesimerkki.)

Tehtäväsarja IV

Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

11. Määritä matriisien A ja B ominaisarvot ja ominaisvektorit.
12. Ovatko matriisit A ja B diagonalisoituvia?
13. Jos jompikumpi matriiseista A ja B on diagonalisoituva, diagonalisoi se ja laske sen viides potenssi korjatun kurssimateriaalin esimerkin 12.8 tapaan.

Tehtäväsarja V

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä käsittelee kurssin ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

14. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & c & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mikä luvun c pitäisi olla, jotta matriisi A ei olisi kääntyvä. (Tutki tilannetta sekä Gaussin–Jordanin menetelmällä että determinanttien avulla.)

15. Oletetaan, että 0 ei ole neliömatriisin A ominaisarvo. Osoita, että A on kääntyvä.