HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Harjoitus 3
27.5.2013

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 3.6.

Tehtäväsarja I

1. Yhtälöryhmien matriiseja on muokattu alkeisrivitoimituksilla päätyen alla oleviin matriiseihin. Päättele suoraan matriisista, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

$$\text{(a)} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \qquad \text{(b)} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 100 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & 8 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Pienen paahtimon valikoimissa on kolme eri kahvisekoitusta, joista kutakin myydään 500 g pussissa. Perussekoituksessa on 300 g kolumbialaisia ja 200 g meksikolaisia papuja. Erikoissekoituksessa on 200 g kolumbialaisia, 200 g kenialaisia ja 100 g meksikolaisia papuja. Gourmet-sekoituksessa on 100 g kolumbialaisia, 200 g kenialaisia ja 200 g meksikolaisia papuja. Varastossa on 30 kg kolumbialaisia, 15 kg kenialaisia ja 25 kg meksikolaisia papuja. Kuinka monta pussia pitäisi kutakin sekoitusta valmistaa, jotta koko varasto tulisi käytettyä?

   Neuvo: Muotoile tilannetta kuvaava yhtälöryhmä ja ratkaise se.

3. Olkoot $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ ja $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että $a\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$.

Tehtäväsarja II

Merkitään $\bar{v}_1 = (0,0,1)$, $\bar{v}_2 = (0,1,1)$ ja $\bar{v}_3 = (1,1,1)$.

4. Osoita, että jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

5. Määritä vektorin $\bar{v} = (2,1,2)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

Tehtäväsarja III

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6. Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä: $A + C$, $2B - 3C$.

7. Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä: BC, CA, AC, A^2, B^5.

8. Olkoot
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Osoita, että matriisin A käänteismatriisi on B, ja päättele tästä, että A on kääntyvä.

9. Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 - 3A + I = O$. Osoita, että matriisi A on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $3I - A$.

Tehtäväsarja IV

10. Joukko $V = \{(s + t,\, 4s + t,\, s - t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ on kahden vektorin virittämä avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. Määritä jotkin sen virittäjävektorit. (*Vihje:* Ks. edellisen harjoituksen tehtävä 2.)

11. Joukko $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. Määritä jotkin sen virittäjävektorit. (*Vihje:* Ks. kurssimateriaalin esimerkki 8.10.)

12. Korjatun kurssimateriaalin esimerkeissä 8.10 ja 8.11 esitetään kaksi tapaa aliavaruuden kannan löytämiseksi. Määritä vektorien $\bar{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, -2, 1)$, $\bar{v}_3 = (3, 2, 2, -1)$ ja $\bar{v}_4 = (1, 2, -2, 1)$ virittämälle avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruudelle kanta molemmilla tavoilla. Mikä on aliavaruuden dimensio?

13. Mitkä ovat korjatun kurssimateriaalin esimerkissä 8.10 saatujen kantavektorien koordinaatit esimerkissä 8.11 saadun kannan suhteen?

Tehtäväsarja V

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä käsittelee kurssin ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

14. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = b \end{cases}$$
Määritä ne reaaliluvut a ja b, joilla yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu.

15. Olkoon $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Oletetaan, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ on kääntyvä. Oletetaan myös, että avaruuden $\mathbb{R}^m$ jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoita, että jono $(A\bar{v}_1, \ldots, A\bar{v}_k)$ on vapaa.