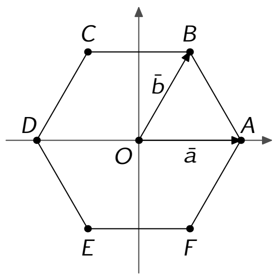
HY / Avoin yliopisto
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Harjoitus 2
20.5.2013

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 27.5.

Tehtäväsarja I

1. Oheisessa kuvassa pisteet $A, B, \ldots, F$ ovat säännöllisen kuusikulmion kärkipisteitä. Kuusikulmion keskipisteenä on origo. Lausu vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla suuntajanat $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ ja $\overline{CF}$.



2. Mitkä seuraavista vektoreista kuuluvat vektorien $\bar{v} = (1, -2)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$ virittämään aliavaruuteen?

$$\bar{a} = (-2, 0), \qquad \bar{b} = (-3, 0), \qquad \bar{c} = (s - 3t,\ -2s + 2t), \quad \text{missä } s, t \in \mathbb{R}.$$

Tehtäväsarja II

3. Muuta matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

alkeisrivitoimituksilla ensin porrasmatriisiksi ja sen jälkeen redusoiduksi porrasmatriisiksi.

4. Ratkaise Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 \phantom{{}+3x_3} = 8 \end{cases}$$

Käytä hyväksesi edellistä tehtävää.

5. Ratkaise Gaussin–Jordanin menetelmällä korjatun luentomateriaalin esimerkin 5.1 yhtälöryhmä.

6. Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty alla oleviin matriiseihin. Määritä yhtälöryhmien ratkaisut.

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

7. Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty matriisiin

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Määritä yhtälöryhmän ratkaisu.

Tehtäväsarja III

8. Jatkoa viime harjoituksen tehtävään 13. Ratkaise syntynyt yhtälöryhmä. Päteekö $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$?

9. Merkitään $\bar{v}_1 = (0, 0, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$ ja $\bar{v}_4 = (1, 0, 1)$. Osoita, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ ja $\bar{v}_4$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.

   Neuvo: Oleta, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, ja osoita, että $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$.

10. Tutki vapauden määritelmän avulla, onko vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa, jos $\bar{v}_1 = (1, 5)$ ja $\bar{v}_2 = (-5, -1)$. Havainnollista tilannetta kuvalla.

11. Onko vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa, jos $\bar{v}_1 = (3, 1)$ ja $\bar{v}_2 = (-6, -2)$? Havainnollista tilannetta kuvalla.

12. Halutaan selvittää, onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa. Millaista yhtälöä pitää tutkia? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan?

    Kun yhtälöryhmän matriisi muokataan porrasmatriisiksi, on tuloksena matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

    Mitä tämän perusteella voidaan päätellä jonon $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaudesta? Perustele vastauksesi.

Tehtäväsarja IV

13. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Osoita yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun määritelmien nojalla, että $c(\bar{v} + \bar{w}) = c\bar{v} + c\bar{w}$.

Tehtäväsarja V

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä käsittelee kurssin ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

14. Kuuluuko tehtävän 8 vektori $\bar{v}_3$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{w}$ virittämään aliavaruuteen?

15. Oletetaan, että $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\bar{u}$, $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat aliavaruuden

$$\mathrm{span}(\bar{u},\ \bar{u} + \bar{v},\ \bar{u} + \bar{v} + \bar{w})$$

alkioita.