

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 20.5.

### Tehtäväsarja I

Merkitään  $\bar{a} = (-3, 0)$ ,  $\bar{b} = (2, 3)$  ja  $\bar{c} = (-2, -1)$ .

- Piirrä kuva, jossa havainnollistat näitä avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektoreita
  - koordinaatiston pisteinä
  - koordinaatiston pisteiden paikkavektoreina.
- Piirrä kuva, jossa havainnollistat vektoreita  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  suuntajanoina, joiden lähtöpiste on  $P = (-2, -3)$ .
- Lue edellisessä tehtävässä piirtämästäsi kuvasta vektorien  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  ja  $\bar{c}$  kärkipisteet. Millä tavalla voisit määrittää kärkipisteet ilman kuvaa?
- Laske seuraavat vektorit ja havainnollista laskutoimituksia piirroksilla:

$$(a) \quad \bar{a} + \bar{b} \quad (b) \quad \bar{b} - \bar{c} \quad (c) \quad \bar{c} - \bar{a}.$$

- Havainnollista kuvalla lineaarikombinaatiota  $\bar{w} = -2\bar{a} + 4\bar{c}$ . Määritä piirroksesi vektorin  $\bar{w}$  komponentit.

### Tehtäväsarja II

Olkoon  $P = (1, 0)$  ja  $\bar{v} = (-1, 3)$ . Tarkastellaan vektorin  $\bar{v}$  suuntaista suoraa  $S$ , joka kulkee pisteen  $P$  kautta.

- Piirrä suora  $S$  koordinaatistoon.
- Kirjoita suora  $S$  muodossa  $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ .
- Määritä jotkin kaksi pisteestä  $P$  poikkeavaa pistettä, jotka ovat suoralla  $S$ . Mitä ovat niitä vastaavat  $t$ :n arvot?

Merkitään  $A = (2, 3, 6)$  ja  $B = (4, -7, -3)$ . Tarkastellaan suoraa  $S$ , joka kulkee pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta.

- Kirjoita suora  $S$  muodossa  $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ .
- Määritä suoran ja  $xy$ -tason leikkauspiste.

Merkitään  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (4, 0, 2)$  ja  $C = (0, 1, -1)$ . Tarkastellaan tasoa  $T$ , joka kulkee pisteiden  $A$ ,  $B$  ja  $C$  kautta.

11. Kirjoita taso  $T$  muodossa  $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ .

### Tehtäväsarja III

12. Tutki piirtämällä, onko vektori  $\bar{a} = (2, 6)$  mahdollista esittää vektoreiden  $\bar{u} = (1, -1)$  ja  $\bar{v} = (1, 1)$  lineaarikombinaationa. Jos mahdollista, määritä kuvastasi kertoimet  $s$  ja  $t$ , joilla  $\bar{a} = s\bar{u} + t\bar{v}$ .
13. Merkitään  $\bar{v}_1 = (2, 0, 1, 4)$ ,  $\bar{v}_2 = (1, 2, 0, 0)$ ,  $\bar{v}_3 = (3, 1, 0, 2)$  ja  $\bar{w} = (4, -4, 3, 12)$ . Halutaan tietää, kuuluuko vektori  $\bar{w}$  vektoreiden  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$  ja  $\bar{v}_3$  virittämään aliavaruuteen  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ . Toisin sanoen on selvitetävä, onko vektori  $\bar{w}$  vektoreiden  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$  ja  $\bar{v}_3$  lineaarikombinaatio. Muodosta yhtälöryhmä, jonka ratkaisu antaa vastauksen kysymykseen. (*Huom.* Tässä ei ole tarkoitus ratkaista yhtälöryhmää vaan ainoastaan muodostaa se.)

### Tehtäväsarja IV

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä käsittelee kurssin ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

14. Oletetaan, että  $n \in \{1, 2, \dots\}$  ja  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ . Käytä luentomateriaalin lauseessa 2.5 lueteltuja vektoreiden yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen ominaisuuksia ja sievennä lauseke

$$2(2\bar{b} + 3\bar{a}) + 4(\bar{a} - \bar{b}).$$

Tunnista ja merkitse näkyviin, mitä ominaisuuksista 1–8 käytät.

15. Tutkitaan suoraa  $S = \{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ , missä  $\bar{p}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ . Oletetaan, että  $\bar{q} \in S$  ja vektori  $\bar{w}$  on yhdensuuntainen vektorin  $\bar{v}$  kanssa. Osoita, että

$$S = \{\bar{q} + t\bar{w} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Mitä tulit todistaneeksi? (*Vihje:* Esimerkistä 3.4 on apua.)