8 Äärelliset yksinkertaiset ryhmät

Tässä luvussa tarkastellaan äärellisiä yksinkertaisia ryhmiä. Kaikki äärelliset ryhmät koostuvat niistä, ja äärellisiä yksinkertaisia ryhmiä kutsutaankin usein äärellisten ryhmien rakennuspalikoiksi. Ryhmäteorian suuri voimanponnistus on ollut luokittelulause, joka listaa kaikki äärelliset yksinkertaiset ryhmät. Matemaatikoilla on siis käytössään tarkka lista äärellisen ryhmäteorian rakennuspalikoista!

Tämän kurssin kannalta äärelliset yksinkertaiset ryhmät ovat kiinnostavia sen vuoksi, että valtaosa niistä saadaan klassisista ryhmistä.

Määritelmä 8.1. Ryhmä on G *yksinkertainen*, jos sillä on täsmälleen kaksi normaalia aliryhmää: $\{1\}$ ja G.

Huomaa, että määritelmän mukaan ryhmä $\{1\}$ ei ole yksinkertainen.

8.1 Kompositiojonot

Jotta voidaan puhua tarkemmin siitä, mitä äärellisten ryhmien rakennuspalikoilla tarkoitetaan, on esiteltävä kompositiojonon käsite.

Määritelmä 8.2. Olkoon G äärellinen ryhmä. Sen *kompositiojono* on äärellinen jono

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G,$$

jota ei voida pidentää lisäämällä siihen normaaleja aliryhmiä. Tekijäryhmiä G_i/G_{i-1} kutsutaan jonon *kompositiotekijöiksi.*

Merkintä $G_{i-1} \lhd G_i$ tarkoittaa, että G_{i-1} on ryhmän G_i normaali aliryhmä, joka on lisäksi G_i:n aito osajoukko.

Äärellisillä ryhmillä on aina olemassa jokin kompositiojono. Voidaan nimittäin aloittaa jonosta $\{1\} \lhd G$. Sen jälkeen jonoa pidennetään niin paljon kuin mahdollista lisääämällä siihen normaaleja aliryhmiä. Tätä ei kuitenkaan voida jatkaa äärettömän kauan, sillä ryhmä on äärellinen. Siten saatu jono on kompositiojono.

Ryhmällä saattaa olla useita kompositiojonoja, mutta ne ovat kaikki pohjimmiltaan samanlaisia.

Lause 8.3. *(Jordan-Hölder) Valitaan kaksi G:n kompositiojonoa, ja oletetaan, että niiden kompositiotekijöiden joukot ovat S ja T. Nyt on on olemassa bijektio $\sigma : S \to T$, jolla pätee $x \cong \sigma(x)$ kaikilla $x \in T$.*

Todistus. Lauseen todistus löytyy mistä tahansa ryhmäteorian perusteoksesta. □

Lause 8.4. *Jono*

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G,$$

on kompositiojono jos ja vain jos sen tekijät G_i/G_{i-1} ovat yksinkertaisia.

Todistus. Oletetaan aluksi, että kyseessä on kompositiojono. Jos on olemassa tekijä G_i/G_{i-1}, joka ei ole yksinkertainen, niin silloin sillä on jokin epätriviaali normaali aliryhmä. Tämä aliryhmä on muotoa H_i/G_{i-1}, missä $G_{i-1} \triangleleft H_i \triangleleft G_1$. Tämä tarkoittaa sitä, että kompositiojonoon voidaan lisätä ryhmä H_i, mikä on ristiriita. Siten kaikki kompositiotekijät ovat yksinkertaisia.

Oletetaan sitten, että kaikki tekijät G_i/G_{i-1} ovat yksinkertaisia. Jos jonoon nyt lisätään ryhmä H_i siten, että $G_{i-1} \triangleleft H_i \triangleleft G_i$, niin silloin H_i/G_{i-1} on ryhmän G_i/G_{i-1} epätriviaali normaali aliryhmä. Siten on päädytty ristiriitaan, ja jonon on oltava kompositiojono. □

Nyt siis tiedämme, että jokainen äärellinen ryhmä voidaan hajottaa kompositiojonoksi, jonka tekijät ovat äärellisiä yksinkertaisia ryhmiä. Nämä kompositiotekijät ovat tavallaan ryhmien rakennuspalikoita, ja kompositiojonot kertovat meille paljon ryhmän rakenteesta. Ne eivät kuitenkaan määrää ryhmän rakennetta täysin, ja kahdella ryhmällä saattaakin olla samanlainen kompositiojono, vaikka ryhmät eivät olisi isomorfisia. Jos ryhmän rakenne halutaan määrittää tarkasti, on rakennuspalikkojen lisäksi tiedettävä, miten ne kiinnittyvät toisiinsa.

Esimerkki 8.5. Etsitään symmetrisen ryhmälle S_3 jokin kompositiojono. Merkitään $A_3 = \{1, (123), (132)\}$. Nyt jono

$$\{1\} \triangleleft A_3 \triangleleft S_3$$

on kompositiojono, ja sen tekijät ovat

$$S_3/A_3 \cong C_2 \quad \text{ja} \quad A_3/\{1\} \cong A_3 \cong C_3,$$

missä C_2 ja C_3 ovat syklisiä ryhmiä.

Tarkastellaan sitten syklistä ryhmää C_6. Sille löydetään kompositiojono

$$\{1\} \triangleleft C_3 \triangleleft C_6,$$

jonka kompositiotekijät ovat

$$C_6/C_3 \cong C_2 \quad \text{ja} \quad C_3/\{1\} \cong C_3,$$

Näiden kahden ryhmän kompositiojonot ovat siis samat, mutta ryhmät eivät kuitenkaan ole isomorfiset.

8.2 Äärellisten yksinkertaisten ryhmien luokittelu

Eräs ryhmäteorian huomattavimmista tuloksista on äärellisten yksinkertaisten ryhmien luokittelu. Luokittelulauseen nojalla tiedämme tarkalleen, millaisia äärellisten ryhmien rakennuspalikat ovat.

Lause 8.6. *Seuraavat äärelliset ryhmät ovat yksinkertaisia eikä muita äärellisiä yksinkertaisia ryhmiä ole:*

(1) sykliset ryhmät C_p, missä p on alkuluku

(2) alternoivat ryhmät A_n, missä $n \geq 5$

(3) klassiset ryhmät (nämä on lueteltu tarkemmin alla)

(4) poikkeukselliset Lie-tyypin ryhmät

(5) sporadiset ryhmät.

8.2.1 Sykliset ryhmät

Syklistä ryhmää, jonka virittäjän kertaluku on n, merkitään C_n. Koska sykliset ryhmät ovat vaihdannaisia, ovat niiden kaikki aliryhmät normaaleja. Siten syklinen ryhmä on yksinkertainen jos ja vain jos sillä ei ole epätriviaaleja aliryhmiä. Koska syklisellä ryhmällä C_n on aina yksi aliryhmä kutakin luvun n jakajaa kohden, niin ryhmä on yksinkertainen jos ja vain jos n on alkuluku.

8.2.2 Alternoivat ryhmät

Alternoivat ryhmät ovat symmetristen ryhmien aliryhmiä. Symmetrinen ryhmä S_n koostuu kaikista joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatioista. Jokainen S_n:n alkio voidaan kirjoittaa vaihtojen tulona. Ne permutaatiot, joiden ilmaisemiseen tarvitaan parillinen määrä vaihtoja, muodostavat aliryhmän A_n.

8.2.3 Klassiset ryhmät

Yksinkertaiset klassiset ryhmät saadaan projektiivisista ryhmistä. Ryhmät $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$ ja $PSp_n(q)$ ovat muutamaa poikeusta luukun ottamatta yksinkertaisia. Ortogonaalisissa ryhmissä tämä ei toimi, sillä $PSO_n(q)$ ei yleensä ole yksinkertainen. Tällöin onkin tarkasteltava aliryhmän $\Omega_n(q)$ tekijäryhmää $P\Omega_n(q)$, joka pienimpiä dimensioita lukuun ottamatta on yksinkertainen.

Lause 8.7. *Seuraavat klassiset ryhmät ovat yksinkertaisia:*

(1) $PSL_n(q)$, jos $n \geq 2$, poikkeuksina $PSL_2(2)$ ja $PSL_2(3)$

(2) $PSU_n(q)$, jos $n \geq 3$, poikkeuksena $PSU_3(2)$

(3) $PSp_n(q)$, jos $n \geq 2$, poikkeuksena $PSp_4(2)$

(4a) $P\Omega_{2n+1}(q)$, jos $n \geq 3$ ja q on pariton

(4b) $P\Omega^+_{2n}(q)$, jos $n \geq 4$

(4b) $P\Omega^-_{2n}(q)$, jos $n \geq 4$.

Todistus. Ryhmien yksinkertaisuus todistetaan niin kutsutun Iwasawan lemman avulla. Tällöin on tutkittava ryhmien toimintaa jossakin joukossa eli tulkittava ne tämän joukon kuvauksiksi. Esimerkiksi ryhmän $PSL_n(q)$ tapauksessa voidaan joukoksi valita projektiivinen avaruus.

Todistukset löytyvät esimerkiksi kirjasta L. C. Grove: Classical Groups and Geometric Algebra. □

Omegaryhmä Tarkastellaan seuraavaksi hieman tarkemmin omegaryhmiä, joiden määritelmä on hyvin erilainen parillisen ja parittoman karakteristikan tapauksessa.

Oletetaan ensin, että kerroinkunnan karakteristika on pariton. Tällöin omegaryhmä $\Omega_n(q)$ voidaan määritellä ortogonaalisen ryhmän peilauksien avulla. (Katso määritelmä 5.15.) Ryhmä $P\Omega_n(q)$ saadaan tuttuun tapaan muodostamalla tekijäryhmä skalaarien suhteen eli

$$P\Omega_n(q) = \Omega_n(q)/(\Omega_n(q) \cap \{I_n, -I_n\}).$$

Parillisessa karakteristikassa ei voida käyttää samaa määritelmää kuin parittomassa, sillä peilauksia ei ole. Jos karakteristika on parillinen ja avaruuden dimensio pariton, niin määritellään $\Omega_n(q) = O_n(q)$ ja $P\Omega_n(q) = PO_n(q)$. Tämä tapaus ei kuitenkaan ole mielenkiintoinen, sillä ryhmä $O_n(q)$ on isomorfinen symplektisen ryhmän $Sp_{n-1}(q)$ kanssa. Siksi ryhmää ei myöskään tarvitse mainita äärellisten yksinkertaisten ryhmien luokittelulauseessa.

Jos sekä karakteristika että avaruuden dimensio ovat parillisia, niin omegaryhmä määritellään seuraavasti: Olkoon $g \in O_n(q)$ ja olkoon k g:n kiinnittämän aliavaruuden dimensio eli

$$k = \dim \mathrm{Fix}(g) = \dim\{v \in K^n \mid gv = v\}.$$

Nyt $g \in \Omega_n(q)$ jos ja vain jos k on parillinen. Projektiivinen ryhmä $P\Omega_n(q)$ on parillisen karakteristikan tapauksessa isomorfinen ryhmän $\Omega_n(q)$ kanssa.

On hyvä tiedostaa, että kirjallisuudessa esiintyy rutkasti erilaisia omegaryhmän määritelmiä.

8.2.4 Poikkeukselliset Lie-tyypin ryhmät

Klassiset ryhmät ovat osa suurempaa kokonaisuutta, jota kutsutaan Lie-tyypin ryhmiksi. Muita Lie-tyypin ryhmiä kutsutaan poikkeuksellisiksi Lie-tyypin ryhmiksi. Muutamia poikkeuksia lukuun ottamatta ne ovat yksinkertaisia.

8.2.5 Sporadiset ryhmät

Sporadiset ryhmät muodostuvat niistä äärellisistä ryhmistä, jotka eivät mahdu mihinkään ylläolevista luokista. Niitä on yhteensä 26 kappaletta.

8.3 Klassisten ryhmien kompositiojonot

Tarkastellaan seuraavaksi klassisten ryhmien kompositiojonoja. Nämä jonot eivät ole erityisen monimutkaisia, sillä ne koostuvat yksinkertaisesta klassisesta ryhmästä sekä syklisistä ryhmistä.

Yleisen lineaarisen ryhmän kompositiojono on

$$\{1\} \lhd \underset{(1)}{\cdots} \lhd Z(SL_n(q)) \underset{(2)}{\lhd} SL_n(q) \lhd \underset{(3)}{\cdots} \lhd GL_n(q).$$

Jonon kompositiotekijät ovat seuraavat:

(1) Jos ryhmä $Z(SL_n(q))$ on yksinkertainen, on tässä välissä vain yksi kompositiotekijä. Muussa tapauksessa kompositiotekijät ovat ryhmän $Z(SL_n(q))$ aliryhmien tekijäryhmiä. Kompositiotekijät ovat syklisiä, sillä ryhmä $\mathbb{F}_q^*$ on syklinen.

(2) Kompositiotekijä on $SL_n(q)/Z(SL_n(q)) = PSL_n(q)$, kunhan $PSL_n(q)$ on yksinkertainen.

(3) Jos ryhmä $GL_n(q)/SL_n(q) \cong \mathbb{F}_q^*$ on yksinkertainen, on tässä välissä vain yksi kompositiotekijä $\mathbb{F}_q^*$. Muussa tapauksessa kompositiotekijät ovat ryhmän $\mathbb{F}_q^*$ aliryhmien tekijäryhmiä ja siten syklisiä.

Unitaarisen ryhmän kompositiojono on

$$\{1\} \lhd \underset{(1)}{\cdots} \lhd \{SU_n(q)\text{:n skalaarit}\} \underset{(2)}{\lhd} SU_n(q) \lhd \underset{(3)}{\cdots} \lhd U_n(q).$$

Jonon kompositiotekijät ovat seuraavat:

(1) Jos ryhmä $\{SU_n(q)\text{:n skalaarit}\}$ on yksinkertainen, on tässä välissä vain yksi kompositiotekijä. Muussa tapauksessa kompositiotekijät ovat tämän ryhmän aliryhmiä. Ne ovat syklisiä.

(2) Kompositiotekijä on $SU_n(q)/\{\text{skalaarit}\} = PSU_n(q)$, kunhan $PSU_n(q)$ on yksinkertainen.

(3) Jos ryhmä $U_n(q)/SU_n(q) \cong \mathrm{Ker}(N)$ on yksinkertainen, on tässä välissä vain yksi kompositiotekijä $\mathbb{F}_q^*$. Muussa tapauksessa kompositiotekijät ovat ryhmän $\mathrm{Ker}(N)$ aliryhmien tekijäryhmiä. Ne ovat syklisiä.

Jos $PSp_n(q)$ on yksinkertainen, niin symplektisen ryhmän kompositiojonoksi saadaan

$$\{1\} \underset{C_2}{\lhd} \{1,-1\} \underset{PSp_n(q)}{\lhd} Sp_n(q),$$

missä kompositiotekijät on merkitty kolmioiden alle.

Jos q on pariton, niin ortogonaalisen ryhmän kompositiojono on

$$\{1\} \underset{1 \text{ tai } C_2}{\lhd} \{1,-1\} \cap \Omega_n(q) \underset{P\Omega_n(q)}{\lhd} \Omega_n(q) \underset{1 \text{ tai } C_2}{\lhd} SO_n(q) \underset{C_2}{\lhd} O_n(q),$$

kunhan vain $P\Omega_n(q)$ on yksinkertainen.

Jos q ja n ovat parillisia, niin ortogonaalisen ryhmän kompositiojono on

$$\{1\} \underset{\Omega_n(q)}{\lhd} \Omega_n(q) \underset{C_2}{\lhd} O_n(q),$$

kunhan vain $\Omega_n(q)$ on yksinkertainen.

8.4 Äärellisten yksinkertaisten ryhmien historia

Äärellisten yksinkertaisten ryhmien historia ulottuu ainakin 1830-luvulle asti. Niihin aikoihin ranskalainen matemaatikko Évariste Galois selvitti ryhmien merkityksen polynomiyhtälöiden ratkaisemisessa ja loi pohjan ryhmäteorialle. Galois ymmärsi, että yksinkertaiset ryhmät ovat tärkeitä, ja tiesi alternoivan ryhmän A_n olevan yksinkertainen, kun $n \geq 5$. Lisäksi Galois konstruoi ainakin ryhmät $PSL_2(p)$, missä p on alkuluku.

Muutamia kymmeniä vuosia myöhemmin 1870-luvulla Galoisin maanmies Camille Jordan löysi loputkin lineaarisista yksinkertaisista ryhmistä $PSL_n(q)$. Hän myös kehitti menetelmiä, joita voitiin myöhemmin käyttää äärellisten yksinkertaisten ryhmien luokittelussa. Samohin aikoihin Émile Mathieu konstruoi viisi sporadista ryhmää, joita kutsutaan Mathieun ryhmiksi. (Mathieukin oli ranskalainen.)

1900-luvulla klassisten ryhmien teoria pääsi toden teolla vauhtiin. Saksalainen matemaatikko Wilhelm Killing oli luokitellut yksinkertaiset Lien algebrat, ja kävi ilmi, että niihin liittyvät niin kutsutut Lie-tyypin ryhmät ovat yksinkertaisia. (Klassiset ryhmät kuuluvat näihin.) Tässä työssä merkittävä osuus oli ranskalaisella Claude Chevalleylla, joka kehitti systemaattisen menetelmän Lie-tyypin ryhmien konstruoimiseksi.

1960-luvulla kaikki Lie-tyypin ryhmät oli löydetty ja matemaatikot alkoivat olla sitä mieltä, että äärellisiä yksinkertaisia ryhmiä ei enää olisi enempää. Luokittelulauseelle ryhdyttiin toiveikkaina kokoamaan todistusta, mutta pian huomattiin, ettei se ollutkaan aivan helppoa. Vuonna 1964 ryhmäteoreetikkoja järkytti kroatialaisen Zvonimir Jankon löydös: uusi yksinkertainen sporadinen ryhmä. Tutkijoille alkoi valjeta, että tehtävä saattaisi hyvin vaikea. Ehkäpä äärellisiä yksinkertaisia ryhmiä olikin jäjellä vielä sadoittain?

Seuraavalla vuosikymmenellä löytyivät loputkin 20 sporadista ryhmää, mutta sen jälkeen alkoi näyttää siltä, että äärellisiä yksinkertaisia ryhmiä ei enää löytyisi enempää. 1980-luvulla alettiin uskoa, että luokittelulause todistuksineen olisi viimeinkin valmis.

Äärellisiä yksinkertaisia ryhmiä ei tähän päivään mennessä ole löytynyt lisää. Luokittelulauseen todistus koostuu useiden eri ihmisten kokoamista palasista, ja sitä on jouduttu moneen otteeseen korjaamaan ja paikkailemaan. Tuhansia sivuja pitkä todistus koostuu sadoista artikkeleista, ja tuskinpa kukaan pystyy sitä kokonaisuudessaan ymmärtämään. Tämä onkin herättänyt kritiikkiä, eivätkä kaikki ole aina olleet sitä mieltä, että tulosta ylipäänsä voi kutsua lauseeksi ja sen todistusta todistukseksi. Todistuksen eri osaset on kuitenkin tarkastettu moneen otteeseen ja eri ihmiset ovat saaneet eri menetelmillä samoja tuloksia, joten vain harva enää nykyään epäilee lauseen todistuksessa olevan vakavia virheitä.

Luokittelulause on eräs ryhmäteorian huikeimmista saavutuksista. Jo pituudeltaankin sen todistus on omaa luokkaansa. Gorenstein, Lyons ja Solomon aloittivat kokoamaan todistusta yksiin kansiin, ja siitä on muodostumassa yksitoistaosainen kirjasarja, josta tähän mennessä on ilmestynyt kuusi osaa. Luokittelulauseen todistusta pyritään edelleen kehittämään ja yksinkertaistamaan, ja tälläkin hetkellä monet ryhmäteoreetikot työskentelevät sen parissa.

Lähde: R. A. Wilson: Finite Simple Groups