7 Symplektiset ryhmät[2]

Symplektiset ryhmät ovat alternoivien muotojen isometriaryhmiä. Alternoivan muodon määrittämä geometria ei ole yhtä intuitiivisesti selkeä kuin esimerkiksi symmetrisen muodon, mutta laskennallisesti se on sitä vastoin helpompi käsitellä. Myös isometriaryhmässä kuvastuu tämä laskennallinen vaivattomuus.

7.1 Symplektiset kannat

Oletetaan tässä kappaleessa, että B on alternoiva bilineaarinen muoto K-kertoimisessa vektoriavaruudessa V.

Jos $u, v \in V$ ja $B(u, v) = b \neq 0$, niin u ja v ovat lineaarisesti riippumattomia. Muuten nimittäin $B(u, v) = B(u, \lambda u) = \lambda B(u, u) = 0$ jollain $\lambda \in K^*$. Valitaan $u_1 = u$ ja $v_1 = b^{-1}v$, jolloin $B(u_1, v_1) = 1$. Nyt vektorit u_1 ja v_1 muodostavat kannan jollekin V:n kaksiulotteiselle aliavaruudelle W. Tuossa aliavaruudessa muoto B on kyseisen kannan suhteen kirjoitettuna

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällaista kaksiulotteista avaruutta kutsutaan *hyperboliseksi tasoksi* (symplektisessä avaruudessa).

Määritelmä 7.1. Jos kaksiulotteisella avaruudella V on kanta (u, v), jonka vektoreille pätee $B(u, v) = 1$, niin avaruutta V kutsutaan *hyperboliseksi tasoksi*. Sen kantavektorit puolestaan muodostavat *hyperbolisen parin*.

Symplektiset avaruudet koostuvat kokonaan hyperbolisista tasoista.

Lause 7.2. *Oletetaan, että B on alternoiva bilineaarinen muoto avaruudessa V. Tällöin avaruudella V on kanta $(u_1, v_1, \ldots, u_r, v_r, w_1, \ldots, w_{n-2r})$, jonka suhteen muodon B matriisi on muotoa*

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} M & & 0 \\ & \ddots & \\ & M & \\ 0 & & 0_{n-2r} \end{bmatrix}, \qquad \textit{missä} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lisäksi jono $(w_1, \ldots, w_{n-2r})$ on radikaalin $\mathrm{rad}(V)$ kanta.

Todistus. Jos $B(u, v) = 0$ kaikilla $u, v \in V$, niin $\mathrm{rad}(V) = V$, joten asetetaan $r = 0$. Muuten voidaan yllä esitetyllä tavalla valita hyperbolinen pari

[2] Nimitys "symplektinen" tulee sanasta *symplektikos*, joka on suora käännös latinasta kreikkaan sanalle *complexus*. Käännös heijastaa symplektisen geometrian ja kompleksiavaruuksien välistä suhdetta, ja sen kehittäjäksi on esitetty Hermann Weylia. Kuitenkin esim. R.A. Wilson mainitsee Sylvesterin sanan ensimmäisenä käyttäjänä.

(u_1, v_1). Olkoon W_1 tämän parin virittämä aliavaruus. W_1 on surkastumaton, joten lemman 5.4 perusteella V on suora summa aliavaruuksista W_1 ja $W_1^\perp$. Lisäksi $\operatorname{rad} V = V^\perp = W_1^\perp \cap (W_1^\perp)^\perp = \operatorname{rad} W_1^\perp$. Konstruktiota voidaan siis jatkaa aliavaruudessa $W_1^\perp$. Lopulta $B(u,v) = 0$ kaikilla $u, v \in W_{2r}^\perp$, jolloin konstruktio pysähtyy, ja $\operatorname{rad}(V) = \operatorname{rad}(W_{2r}^\perp) = W_{2r}^\perp$. □

Kutsutaan tästä lähtien yllä olevassa lauseessa esitettyä kantaa *symplektiseksi kannaksi*. Lauseesta saadaan heti seuraavat korollaarit.

Korollaari 7.3. *Jos vektoriavaruudessa on surkastumaton alternoiva muoto, niin avaruuden dimensio on parillinen.*

Korollaari 7.4. *Vektoriavaruuden kaikki surkastumattomat alternoivat bilineaariset muodot ovat ekvivalentteja.*

Korollaari 7.5. *Alternoivaa muotoa esittävän matriisin determinantti on aina neliö kerroinkunnassa.*

Todistus. Jos matriisi $\hat{B}$ on lauseessa mainittua muotoa $\hat{B}_0$, sen determinantti on 1. Muuten löytyy jokin kannanvaihtomatriisi L, jolla $\hat{B} = L^\top \hat{B}_0 L$, jolloin $\det \hat{B} = (\det L)^2$. □

Mainittakoon tässä yhteydessä, että alternoivan muodon matriisilla on muitakin esitystapoja, joita käytetään ahkerasti kirjallisuudessa. Ehkä tavallisin yllä olevasta poikkeava surkastumattoman muodon esitystapa on

$$\hat{B} = \left[\begin{array}{c|c} 0_r & I_r \\ \hline -I_r & 0_r \end{array}\right].$$

Tämä esitys saadaan yllä olevasta yksinkertaisesti kantavektoreiden järjestystä vaihtamalla.

7.2 Symplektisen ryhmän määritelmä

Symplektiset ryhmät ovat alternoivan muodon isomorfiaryhmiä.

Määritelmä 7.6. Oletetaan, että B on surkastumaton alternoiva bilineaarinen muoto vektoriavaruudessa V. Jos lineaarikuvaus g säilyttää muodon B, niin sanotaan että g on *symplektinen*. Symplektisten kuvausten ryhmää kutsutaan *symplektiseksi ryhmäksi* ja merkitään $Sp^{(B)}(V)$.

Merkinnässä $Sp(V)$ muotoa ei yleensä tarvitse merkitä näkyviin, koska kaikki avaruuden alternoivat muodot ovat keskenään ekvivalentteja. Matriisiyhtälöstä $g^\top \hat{B} g = \hat{B}$, missä B on alternoiva muoto, nähdään helposti, että $\det g = \pm 1$ kaikilla $g \in Sp(V)$. Myöhemmin kuitenkin voidaan todeta, että symplektisten kuvausten determinantti on aina 1. Mitään erityistä symplektistä ryhmää "SSp(V)" ei siis ole tarvetta määritellä.

Projektiivinen symplektinen ryhmä $PSp(V)$ määritellään tuttuun tapaan tekijäryhmänä skalaarimatriisien suhteen. Symplektisiä skalaarimatriiseja ovat vain I ja $-I$. Nämä itse asiassa muodostavat ryhmän $Sp(V)$ keskuksen, joten $PSp(V) = Sp(V)/Z(Sp(V))$.

Esimerkki 7.7. Vektoriavaruuden V *pinta-alamuoto* on bilineaarinen kuvaus $A : V \times V \to K$, jolle pätee $A(v, w) = 0$ aina, kun v ja w ovat lineaarisesti riippuvia. Pinta-alamuoto ilmoittaa kahden vektorin virittämän suunnikkaan *suunnatun pinta-alan*. Bilineaarisuusehto takaa, että esimerkiksi skaalatun suunnikkaan ala skaalautuu myös oikeassa suhteessa. Toisaalta, jos v ja w sijaitsevat samalla suoralla (eli ovat lineaarisesti riippuvia), niin ne virittävät janaksi surkastuneen suunnikkaan, jonka pinta-ala on 0. Suunnatulla tarkoitetaan tässä yhteydessä sitä, että pinta-alamuoto voi olla positiivinen tai negatiivinen, ja jos suunnikas "käännetään" vaihtamalla sen virittävät vektorit keskenään, pinta-alamuoto vaihtaa merkkiä. Esimerkki pinta-alamuodosta on kaksiulotteisen avaruuden determinanttikuvaus.

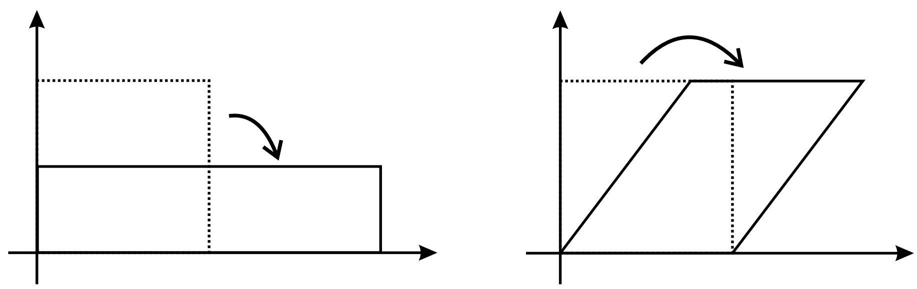
Koska pinta-alamuoto on itse asiassa alternoiva bilineaarinen muoto, sen säilyttävät lineaarikuvaukset ovat symplektisiä kuvauksia. Esimerkiksi tasossa $\mathbb{R}^2$ tällaiset kuvaukset ovat *kiertoja*, *litistyksiä*, *transvektioita* tai niiden yhdistelmiä. Kierrot ovat tuttuja erityisen ortogonaalisen ryhmän alkioina. Litistyksen matriisi on sopivassa kannassa

$$L_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{bmatrix}.$$

Transvektiot puolestaan ovat kuvauksia, jotka muuttavat jonkin kiinnitetyn suoran suuntaiset suorakulmiot suunnikkaiksi niiden korkeutta muuttamatta. Sellaisen matriisi on sopivassa kannassa muotoa

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kaikki nämä kuvaukset säilyttävät kahden vektorin virittämän suunnikkaan pinta-alan ja lisäksi kyseisten vektorien järjestyksen niiden muodostaman kulman kylkinä. Voidaan itse asiassa osoittaa, että kaikki symplektiset kuvaukset voidaan ilmaista transvektioiden avulla.



Kuva 7: Litistys ja transvektio ovat tason symplektisiä kuvauksia

Symplektiset kuvaukset esittävät merkittävää osaa myös teoreettisessa fysiikassa.

Esimerkki 7.8. Klassisessa mekaniikassa on tapana hankkiutua eroon kappaleeseen vaikuttavista tuki- ja sidosvoimista korvaamalla tavalliset paikkakoordinaatit *yleistetyillä koordinaateilla* q_i. Esimerkiksi vaijerin päässä pyörivä moukari voi liikkua ainoastaan ympyrän kehällä, jolloin sen liikkeen kuvaamiseen riittää tuntea kiertokulma q. Kun koordinaatit valitaan sopivasti, liikeyhtälöt tulevat muotoon

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

missä $\dot{q}_i$ merkitsee q_i:n aikaderivaattaa ja L on niin sanottu *Lagrangen funktio*, joka määritellään systeemin potentiaali- ja kineettisen energian erotuksena.

Yllä oleva liikeyhtälö sisältää toisen asteen derivaattoja. Hamiltonilaisessa muotoilussa otetaan käyttöön kutakin yleistettyä koordinaattia vastaa *yleistetty liikemäärä* $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$. Kun lisäksi määritellään *Hamiltonin funktio* $H = \dot{q}_i p_i - L$, liikeyhtälöt tulevat muotoon

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \text{ja} \qquad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Tässä muotoilussa yhtälöt sisältävät vain ensimmäisen asteen derivaattoja, mutta toisaalta vapaita muuttujia on kaksinkertainen määrä aikaisempaan verrattuna.

Kirjoitetaan nyt yleistetyt koordinaatit ja liikemäärät samaan vektoriin $\eta = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$. Tällöin Hamiltonin liikeyhtälöt tulevat muotoon

$$\dot{\eta} = J\frac{\partial H}{\partial \eta}, \qquad \text{missä} \quad J = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

Voidaan osoittaa, että Hamiltonin funktio säilyy ajasta riippumattomissa koordinaatistonmuunnoksissa. Tällöin, jos L on muunnoksen $\eta \mapsto \zeta$ Jacobin matriisi, niin

$$L^\top J L = J.$$

Antisymmetrisenä matriisina J määrittää jonkin alternoivan muodon, joten koordinaatistonmuunnoksen Jacobin matriisin on oltava symplektinen.

7.3 Transvektiot eli murroskuvaukset

Olkoon W jokin hypertaso vektoriavaruudessa V. Transvektioksi kutsutaan lineaarikuvausta T, jolle pätee $Tw = w$ kaikilla $w \in W$ ja $Tv - v \in W$ kaikilla $v \in V$.

Määritelmä 7.9. Olkoon B alternoiva muoto K-kertoimisessa avaruudessa V. Olkoot lisäksi $u \in V \setminus \{0\}$ ja $\alpha \in K$. Lineaarikuvausta

$$\tau_{u,\alpha}(v) = v + \alpha B(u, v)u$$

kutsutaan *symplektiseksi transvektioksi*.

On helppo nähdä, että $\tau_{u,\alpha}$ kiinnittää hypertason $u^{\perp}$ ja että $\tau_{u,\alpha}(v)-v$ on vektorin u suuntainen. Täten $\tau_{u,\alpha}(v)-v \in u^{\perp}$, ja kuvaus $\tau_{u,\alpha}$ on transvektio. Lisäksi kaikilla $v, w \in V$ pätee

$$\begin{aligned} B\big(\tau_{u,\alpha}(v), \tau_{u,\alpha}(w)\big) &= B\big(v + \alpha B(u,v)u,\ w + \alpha B(u,w)u\big) \\ &= B(v,w) + \alpha B(u,w)B(v,u) + \alpha B(u,v)B(u,w) \\ &\quad + \alpha^2 B(u,v)B(u,w)B(u,u) \\ &= B(v,w). \end{aligned}$$

Siispä kuvaus $\tau_{u,\alpha}$ on myös symplektinen. Symplektiset transvektiot hoitavat tietyssä mielessä ortogonaalisten peilausten virkaa symplektisissä ryhmissä.

Lause 7.10. *Avaruuden V symplektiset transvektiot virittävät koko symplektisen ryhmän $Sp(V)$.*

Todistus. Sivuutetaan. □

Korollaari 7.11. *Kaikilla $g \in Sp(V)$ pätee* $\det g = 1$.

Todistus. Olkoon $\tau = \tau_{u_1,\alpha}$ avaruuden V mielivaltainen symplektinen transvektio. Valitaan avaruudelle $u_1^{\perp}$ jokin kanta $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ ja täydennetään se vektorilla u_n avaruuden V kannaksi. Nyt kaikilla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ pätee $\tau(u_i) = u_i$, ja lisäksi $\tau(u_n) = u_n + \lambda u_1$, missä $\lambda = \alpha B(u_1, u_n)$. Valitussa kannassa transvektion matriisi on siis

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nähdään, että mielivaltaisen symplektisen transvektion determinantti on 1. Jokainen $g \in Sp(V)$ on puolestaan transvektioiden tulo, joten $\det g = 1$. □

7.4 Yhteys kompleksikertoimisiin avaruuksiin

Tarkastellaan kompleksikertoimista avaruutta $\mathbb{C}^n$, jossa on määritelty hermiittinen pistetulo $x \cdot y = \sum_k x_k \bar{y}_k$. Jos merkitään $x_k = a_k + b_k i$ ja $y_k = c_k + d_k i$, niin

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} \big[(a_k c_k + b_k d_k) + i(b_k c_k - a_k d_k)\big].$$

Samastetaan nyt $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ kuvauksella

$$\iota(a_1 + b_1 i, \ldots, a_n + b_n i) = (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n).$$

Tällöin hermiittiselle pistetulolle pätee

$$x \cdot y = B_1\big(\iota(x), \iota(y)\big) + iB_2\big(\iota(x), \iota(y)\big),$$

missä B_1 on tavallinen ortogonaalinen pistetulo avaruudessa $\mathbb{R}^{2n}$ ja B_2 on alternoiva muoto

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hermiittisen sisätulon arvot ovat siis kompleksilukuja, joiden imaginaariosa saadaan tietyn reaaliavaruuden alternoivan muodon arvoista. Kuvausten, jotka säilyttävät kompleksiavaruudessa esimerkiksi vektorien pituudet, täytyy siis olla tuossa reaaliavaruudessa symplektisiä kuvauksia. Tällä tavoin symplektisen geometrian tutkiminen liittyy läheisesti kompleksikertoimisten vektoriavaruuksien geometriaan.