Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 4, ratkaisuehdotus
8 sivua

Huom. Tehtävissä 1, 2 ja 5 olleet virheet on korjattu tähän ratkaisuehdotukseen.

Tehtävissä 1–5 oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka kerroinkunnan karakteristika ei ole 2.

1. Merkitään skalaarimatriisien joukkoa kirjaimella Z. Projektiivinen ortogonaalinen ryhmä ja projektiivinen erityinen ortogonaalinen ryhmä määritellään seuraavasti:

   $$PO(V) = O(V)/(Z \cap O(V)) \quad \text{ja} \quad PSO(V) = SO(V)/(Z \cap SO(V)).$$

   Osoita, että $|Z \cap O_n(\mathbb{R})| = 2$ ja että $PSO_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$ jos ja vain jos n on pariton. Muotona on tavallinen pistetulo ($B(x, x) = x \cdot x$).

   Ratkaisu:

   Olkoon B $\mathbb{R}^n$:n symmetrinen bilineaarinen muoto. Oletetaan, että $\alpha I_n \in Z \cap O_n(\mathbb{R})$. Koska αI_n on ortogonaalinen, niin

   $$\hat{B} = \alpha I_n \hat{B} \alpha I_n = \alpha^2 \hat{B}.$$

   Siten $\alpha^2 = 1$. Reaalilukujen joukossa on vain kaksi alkiota, jotka toteuttavat tämän ehdon: 1 ja -1. Siten $Z \cap O_n(\mathbb{R}) = \{I_n, -I_n\}$.

   Jos n on pariton, niin $-I_n \notin SO_n(\mathbb{R})$ ja $PSO_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})/\{I_n\}$. Kanoninen surjektio $g \mapsto g(Z \cap SO_n(\mathbb{R}))$ on nyt isomorfismi ryhmältä $SO_n(\mathbb{R})$ ryhmälle $PSO_n(\mathbb{R})$.

   Jos taas n on parillinen, niin $SO_n(\mathbb{R}) = \{I_n, -I_n\}$. Nyt $PSO_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})/\{I_n, -I_n\}$ ja kanoninen surjektio ei ole isomorfismi, sillä esimerkiksi alkiot I_n ja $-I_n$ kuvautuvat samalle alkiolle. (Jos ollaan aivan tarkkoja, niin tehtävässä ei puhuttu isomorfismista vaan yhtäsuuruudesta. Sillä kuitenkin tarkoitettiin kanonista isomorfismia.)

   Huomaa, että tehtävässä ei tarvinnut käyttää tietoa siitä, että muotona on pistetulo.

2. Oletetaan, että avaruudella K^3 on kanta $S = (v_1, \ldots, v_3)$, jossa eräällä symmetrisellä muodolla on matriisi

   $$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Etsi kanta T, jossa kyseistä muotoa vastaa diagonaalimatriisi $\hat{B}_2$. Oleta sitten, että kerroinkuntana on $\mathbb{R}$, ja etsi kanta U, jossa muodon matriisi $\hat{B}_3$ on edelleen diagonaalinen, mutta diagonaalialkiot ovat ± 1 tai 0.

Ajatellaan nyt, että matriisit $\hat{B}_1$ ja $\hat{B}_3$ onkin annettu samassa kannassa, jossa ne siis vastaavat ekvivalentteja muotoja B_1 ja B_3. Etsi konjugoiva matriisi $T \in GL_n(\mathbb{R})$, jolla $T^\top B_1 T = B_3$.

Ratkaisu:

Valitaan uusi kanta (u_1, u_2, u_3) käyttämällä huomautusta 5.6. Valitaan

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 \\
u_3 &= v_3 - \frac{B(u_1, v_3)}{B(u_1, u_1)} u_1 - \frac{B(u_2, v_3)}{B(u_2, u_2)} u_2 = -4v_1 + v_3.
\end{aligned}
$$

Nyt muodon B matriisi kannan (u_1, u_2, u_3) suhteen kirjoitettuna on

$$
\hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}.
$$

Matriisi $\hat{B}_3$ saadaan skaalaamalla kantavektoria u_3 niin, että uusi kanta on

$$
\begin{aligned}
w_1 &= u_1 \\
w_2 &= u_2 \\
w_3 &= \frac{1}{\sqrt{18}} u_3.
\end{aligned}
$$

Nyt muodon B matriisi kannan (w_1, w_2, w_3) on

$$
\hat{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Etsitään vielä matriisi T, jolle pätee $T^\top B_1 T = B_3$. Tämä saadaan kannanvaihtomatriisista T, joka vaihtaa kannasta (v_1, v_2, v_3) kantaan (w_1, w_2, w_3) (vrt. lause 4.4 ja sen todistus):

$$
T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{18} \end{bmatrix}.
$$

3. Osoita, että seuraavat kuvaukset ovat ortogonaalisia hyperbolisessa tasossa $\mathbb{R}^2$:

$$g = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}, \qquad p = \begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ -4/3 & -5/3 \end{bmatrix},$$

$$h = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \quad \text{kaikilla } \varphi.$$

Ratkaisu:

Hyperbolisen tason bilineaarinen muoto on

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kuvaus T on ortogonaalinen, jos se toteuttaa ehdon $T^\top BT = B$.

Koska

$$\begin{aligned} g^\top Bg &= \begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} p^\top Bp &= \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 \\ 4/3 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ -4/3 & -5/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ -4/3 & -5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= B, \end{aligned}$$

niin g ja p ovat ortogonaalisia.

Palautetaan mieleen, että

$$\sinh\varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}, \ \cosh\varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} \ \text{ja} \ -\sinh^2\varphi + \cosh^2\varphi = 1.$$

Nyt

$$\begin{aligned} h^\top Bh &= \begin{bmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & -\cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= B, \end{aligned}$$

joten h on ortogonaalinen.

4. Myoneja syntyy ilmakehässä noin 15 km korkeudessa kosmisten säteiden vaikutuksesta. Niiden elinaika on keskimäärin 2,2 mikrosekuntia. Eräs havaitsija kuitenkin näki tällaisen myonin saavuttavan maanpinnan 9,5 mikrosekunnin kuluttua sen syntymästä. Olettaen, että myoni liikkui tasaisella nopeudella suoraan alaspäin, laske sen taivaltama matka sen omassa koordinaatistossa käyttäen hyväksi sitä tietoa, että koordinaatistonmuunnos säilyttää Minkowskin avaruuden geometrian.

Ratkaisu:

Valitaan origoksi myonin putoamispaikka hetkellä, jolloin se osuu maahan. Tällöin maassa olevan havainnoitsijan koordinaatistossa myonin koordinaatit ovat sen syntyhetkellä

$$v_1 = (-9{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}, 0, 0, 15000\,\mathrm{m}).$$

Myonin koordinaatistossa vastaava vektori on puolestaan

$$v_2 = (-2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}, 0, 0, x),$$

missä x on myonin taivaltama matka sen omassa koordinaatistossa.

Tiedämme, että on olemassa Lorentzin muunnos L, joka kuvaa vektorin v_1 vektorille v_2. Tämä kuvaus on lineaarikuvaus, joka säilyttää Minkowskin avaruuden muodon

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tämä matriisi on itse asiassa skaalattu, ja sitä voi käyttää vain silloin, kun kaikkien koordinaattien yksiköt ovat samoja. Koska tämän tehtävän tapauksessa on yksiköinä sekä sekunteja että metrejä, on ratkaisemiseen käytettävä skaalaamatonta muotoa

$$M' = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

missä $c = 2{,}98 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ on valon nopeus. (Tätä ei asiaa tuntematon lukija voinut tietenkään tietää.) Muoto M on siis saatu muodosta M' kertomalla ensimmäistä kantavektoria valon nopeudella c.

Nyt tiedämme, että $M'(v_2, v_2) = M'(Lv_1, Lv_1) = M'(v_1, v_1)$. Koska

$$M'(v_2, v_2) = (-2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})^2 \cdot c^2 - 0 - 0 - (15000\,\mathrm{m})^2 = (655{,}6\,\mathrm{m})^2 - (15000\,\mathrm{m})^2$$

ja

$$M'(v_1, v_1) = (-9,5 \cdot 10^6 s)^2 \cdot c^2 - 0 - 0 - x^2 = (2831m)^2 - x^2,$$

niin tuntemattoman x arvoksi saadaan likimain $14745m$.

Tehtävän lukuarvot eivät itse asiassa vastaa todellista tilannetta. Tämä johtuu siitä, että tehtävän laatija luki lähtömateriaalia väärin. Näillä arvoilla myonin lähtövektorin nelipituus on negatiivinen, siis paikanluonteinen, eikä myoni siksi voisi mitenkään päästä koordinaatiston origoon. Annettujen arvojen perusteella myoni näyttääkin tehtävässä liikkuvan valoa nopeammin. Laskujen perusperiaatetta tämä ei kuitenkaan muuta.

5. Tutki avaruutta $\mathbb{F}_5^2$ varustettuna bilineaarisella muodolla

$$B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{(pistetulo)}.$$

Mitkä vektorit ovat isotrooppisia? Etsi kanta, jossa muodon matriisi on jompaa kumpaa lauseen 5.23 mainitsemaa perustyyppiä.

Määritä ryhmien $O_2^{(B)}(5)$ ja $SO_2^{(B)}(5)$ alkiot ja niiden kertaluvut. Ovatko nämä isomorfisia joidenkin tuttujen ryhmien kanssa?

Ratkaisu:

Vektori $x \in \mathbb{F}_5^2$ on isotrooppinen, jos $0 = B(x, x) = x_1^2 + x_2^2 = 0$. Aloitetaan siis tarkastelemalla kunnan $\mathbb{F}_5^2$ alkioiden neliöitä:

$$\begin{aligned} &0^2 = 0 \\ &1^2 = (-1)^2 = 1 \\ &2^2 = (-2)^2 = -1. \end{aligned}$$

Nähdään, että täsmälleen kahdeksan paria (x_1, x_2) toteuttavat ehdon $x_1^2 + x_2^2 = 0$, ja ne ovat $\pm(1, 2)$, $\pm(2, 1)$, $\pm(1, -2)$ ja $\pm(2, -1)$.

Etsitään seuraavaksi kanta, jonka suhteen B:n matriisi on lauseessa 5.23 mainittua tyyppiä. Valitaan kantavektoreiksi $v_1 = e_1$ ja $v_2 = 2e_2$, jolloin $B(v_1, v_1) = 1$, $B(v_1, v_2) = 0$ ja $B(v_2, v_2) = 4B(e_2, e_2) = 4 = -1$. Siten muodon B matriisi kannassa (v_1, v_2) on

$$\hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

eli B on $+$-tyyppiä.

Määritetään seuraavaksi ryhmän $O_2^+(5)$ alkiot. Käytetään tässä alkuperäistä kantaa, jossa B:n matriisi on

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jotta matriisi

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olisi ryhmässä $O_2^+(5)$, niin sen täytyy toteuttaa ehto $g^\top \hat{B}_1 g = \hat{B}_1$. Nyt saamme yhtälön

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix}.$$

Tästä seuraa, että $a^2+c^2 = 1$, $b^2+d^2 = 1$ ja $ab+cd = 0$. Käyttämällä näitä yhtälöitä sekä muistamalla, että ryhmän alkioiden täytyy olla kääntyviä, voimme päätellä, että

$$O_2^+(5) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Niiden kertaluvut ovat 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4 ja 4.

Nyt on helppo nähdä, että ryhmässä $SO_2^+(5)$ on neljä alkiota:

$$SO_2^+(5) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ryhmä $O_2^+(5)$ on isomorfinen neliön symmetriaryhmän D_8 kanssa. Neliön symmetriaryhmä muodostuu kaikista mahdollisista neliön kierroista ja peilauksista, ja on muotoa $\langle a, b \mid a^4 = 1 = b^2, bab = a^{-1} \rangle$. Sen virittäjiä ovat siis kierto a ja peilaus b.

Virittäjiksi a ja b voidaan valita esimerkiksi alkiot

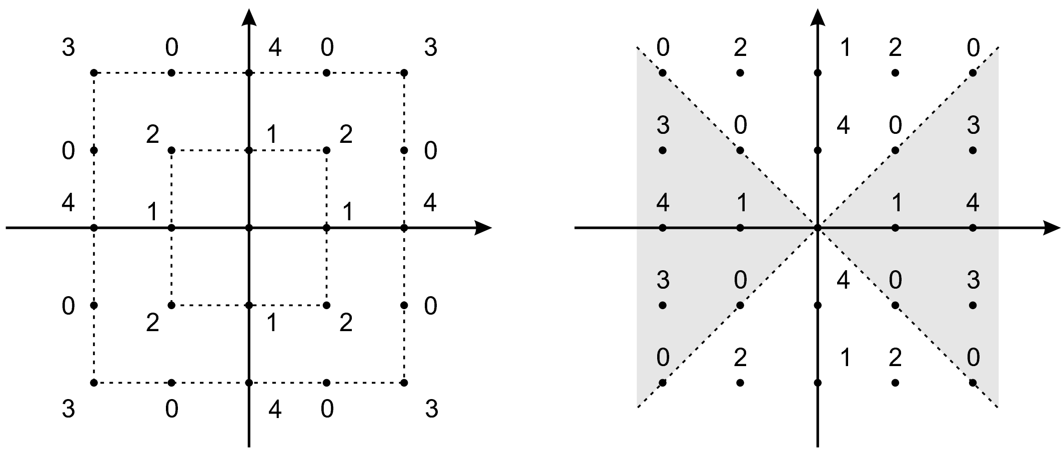
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jotka vastaavat 90° kiertoa ja peilausta y-akselin suhteen. On helppo huomata, että a ja b toteuttavat ehdot $a^4 = 1 = b^2$ ja $bab = a^{-1}$. Tämän lisäksi on vielä osoitettava, että ne virittävät ryhmän $O_2^+(5)$.

Ryhmä $SO_2^+(5)$ on syklinen ryhmä, jonka virittää esimerkiksi alkio

$$a = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ryhmä muodostuu kaikista neliön kierroista. Lauseen 5.2 nojalla tiedämme, että $SO_2^+(5)$ ja mikä tahansa joukon $O_2^+(5) \setminus SO_2^+(5)$ alkio virittävät ryhmän $O_2^+(5)$. Siten a ja b virittävät $O_2^+(5)$:n.



Kuviin on piirretty vektoriavaruus $\mathbb{F}_5^2$ ja vektorin v kohdalle on merkitty sen pituus $B(v,v)$. Vasemmanpuoleisessa kuvassa on käytetty kantaa, jonka suhteen mudon B matriisi on $\hat{B}_1$. Kuvasta näkyy selvästi, että $O_2^+(5)$ on isomorfinen neliön symmetriaryhmän kanssa. Ryhmän alkiot nimittäin säilyttävät vektoreiden pituudet sekä kaikki origon kautta kulkevat suorat, ja siten niiden on pakko joko kiertää tai peilata kumpaakin kuvaan piirrettyä neliötä yhtä aikaa.

Oikeanpuoleisessa kuvassa on käytetty uutta kantaa, jonka suhteen muodon matriisi on $\hat{B}_2$. Tästä kuvasta nähdään, että kyseessä on hyperbolinen taso. Kuvaan on piirretty isotrooppiset suorat, joilla vektorien neliömuoto on nolla.

6. Olkoon K kunta, jonka karakteristika on 2.

   (a) Tarkastellaan kuvausta $Q : K^4 \to K$, missä $Q(v) = v_1v_3 + v_2v_4$. Osoita, että Q on neliömuoto, ja kirjoita vastaavan bilineaarisen muodon matriisi.

   (b) Osoita, että jos Q on avaruuden K^n neliömuoto, niin sitä vastaava bilineaarinen muoto on alternoiva ja symmetrinen.

Ratkaisu:

(a) Määritellään kuvaus $B : K^4 \times K^4 \to K$ siten, että

$$B(x,y) = Q(x+y) + Q(x) + Q(y).$$

Neliömuodon määritelmän mukaan Q on neliömuoto jos ja vain jos B on bilineaarinen muoto.

Koska

$$\begin{aligned}B(x,y) =&(x_1+y_1)(x_3+y_3)+(x_2+y_2)(x_4+y_4)\\&+x_1x_3+x_2x_4+y_1y_3+y_2y_4\\=&x_1y_3+x_3y_1+x_2y_4+x_4y_2,\end{aligned}$$

niin nähdään, että B on bilineaarinen. Siten Q on neliömuoto. Muodon B matriisi on

$$\hat{B} = \begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

(b) Olkoon B neliömuotoa Q vastaava bilineaarinen muoto. Nyt B on symmetrinen, sillä

$$\begin{aligned}B(x,y) =&Q(x+y)+Q(x)+Q(y)\\=&Q(y+x)+Q(y)+Q(x)\\=&B(y,x).\end{aligned}$$

Muoto B on myös alternoiva, sillä

$$B(x,x) = Q(x+x)+Q(x)+Q(x) = 4Q(x)+2Q(y) = 0$$

karakteristikan ollessa kaksi.