Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 3, ratkaisuehdotus
6 sivua

1. Määritellään joukot T, B ja U seuraavasti:

   (a) $T = \{g \in GL_n(K) \mid g \text{ on diagonaalimatriisi}\}$

   (b) $B = \{g \in GL_n(K) \mid g \text{ on yläkolmiomatriisi}\}$

   (c) $U = \{g \in B \mid g\text{:n diagonaalialkiot ovat ykkösiä}\}$.

   Osoita, että joukot T, B ja U ovat ryhmän $GL_n(K)$ aliryhmiä. Osoita, että $B = TU$, eli että jokainen B:n alkio voidaan ilmaista T:n ja U:n alkion tulona.

   Ratkaisu:

   (a) Selvästikin $I_n \in T$. Oletetaan sitten, että $A, C \in T$ ja merkitään $AC = D = [d_{ij}]$. Jos $i \neq j$, niin

   $$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = a_{ii}c_{ij} + a_{ij}c_{jj} = 0,$$

   sillä $a_{ik} = 0$, jos $i \neq k$ ja $c_{kj} = 0$, jos $j \neq k$. Siten D on diagonaalimatriisi.
   Osoitetaan vielä, että $A^{-1} \in T$. Merkitään $A^{-1} = [a'_{ij}]$. Jos $i \neq j$, niin

   $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a'_{kj} = 0,$$

   sillä $AA^{-1} = I_n$. Toisaalta

   $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a'_{kj} = a_{ii}a'_{ij},$$

   ja $a_{ii} \neq 0$, sillä muuten A ei olisi kääntyvä. Siten $a'_{ij} = 0$ ja A^{-1} on diagonaalimatriisi.

   (b) Selvästikin $I_n \in B$. Oletetaan sitten, että $A, C \in B$ ja merkitään $AC = D$. Jos $i > j$, niin

   $$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}c_{kj} = 0,$$

sillä $a_{ik} = 0$, kun $k < i$ ja $c_{kj} = 0$, kun $k \geq i > j$. Siten D on yläkolmiomatriisi.

Osoitetaan seuraavaksi, että $A^{-1} \in B$. Merkitään $A^{-1} = [a'_{ij}]$. Kun $i \neq j$, niin

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{kj} = 0,$$

sillä $AA^{-1} = I_n$.

Osoitetaan induktiolla i:n suhteen, että jos $i > j$, niin $a'_{ij} = 0$. Oletetaan aluksi, että $i = n$. Kun $n > j$, niin

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} a'_{kj} = a_{nn} a'_{nj},$$

sillä $a_{nk} = 0$, kun $k < n$. Koska $a_{nn} \neq 0$, niin $a'_{nj} = 0$. Siten väite pätee, kun $i = n$.

Oletetaan sitten, että $i < n$ ja oletetaan, että väite pätee kaikilla $k > i$. Kun $i > j$, niin

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{kj} \overset{I.O.}{=} \sum_{k=1}^{i} a_{ik} a'_{kj} = a_{ii} a'_{ij},$$

sillä $a_{ik} = 0$, kun $i > k$. Huomataan, että $a_{ii} \neq 0$, sillä muuten $\det(A) = 0$. Siksi $a'_{ij} = 0$.

Siten A^{-1} on diagonaalimatriisi.

(c) Selvästikin $I_n \in U$. Oletetaan sitten, että $A, C \in U$ ja merkitään $AC = D$. Nyt $D \in B$, ja lisäksi

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{ki} = a_{ii} c_{ii} = 1,$$

sillä $a_{ik} = 0$, jos $k < i$, ja $c_{ki} = 0$, jos $k > i$. Siten $D \in U$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $A^{-1} \in U$. Merkitään $A^{-1} = [a'_{ij}]$. Nyt $A^{-1} \in B$, ja lisäksi

$$1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{ki} = a_{ii} a'_{ii}.$$

Koska $a_{ii} = 1$, niin $a'_{ii} = 1$, ja voimme päätellä, että $A^{-1} \in U$.

2. Osoita, että ryhmän $PGL(V)$ eri alkiot ovat aina erilaisia projektiivisen avaruuden $\mathbb{P}(V)$ kuvauksia.

   Ratkaisu: Osoitetaan aluksi, että ryhmän $PGL(V)$ alkioita voidaan todellakin pitää projektiivisen avaruuden kuvauksina. (Tätä ei tehtävässä suoraan kysytty.)

   Merkitään $Z = Z(GL(V))$. Olkoon $\bar{g} \in PGL(V)$. Oletetaan, että $g, h \in GL(V)$ ovat sellaisia, että $\bar{g} = gZ = hZ$. Nyt $h = \alpha g$ jollakin $\alpha \in K^*$, joten $h(\langle v \rangle) = \langle h(v) \rangle = \langle \alpha g(v) \rangle = \langle g(v) \rangle = g(\langle v \rangle)$ kaikilla $v \in V$. Tämä tarkoittaa sitä, että vaikka kuvaus $\bar{g}$ määritellään sivuluokan edustajan avulla, edustajan valinnalla ei ole vaikutusta kuvauksen arvoihin.

   Todistetaan sitten tehtävän varsinainen väite. Olkoot $gZ, hZ \in PGL(V)$, ja oletetaan, että ne ovat sama projektiivisen avaruuden $\mathbb{P}(V)$ kuvaus. Nyt $(gZ)(\langle v \rangle) = (hZ)(\langle v \rangle)$ eli $g(\langle v \rangle) = h(\langle v \rangle)$ kaikilla $v \in V$. Siten $g^{-1}h : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ on identtinen kuvaus. Lauseen 3.12 nojalla $g^{-1}h \in Z$. Siten $gZ = hZ$, eli ne ovat sama ryhmän $PGL(V)$ alkio.

3. Osoita, että ryhmä $PGL_2(2)$ on isomorfinen ryhmän S_3 kanssa, missä S_3 on symmetrinen ryhmä eli kolmen alkion permutaatioiden ryhmä. Voit osoittaa isomorfisuuden esimerkiksi tarkastelemalla sitä, miten $PGL_2(2)$ kuvaa projektiivisen suoran $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^2)$ pisteitä

   Ratkaisu: Symmetrinen ryhmä S_3 muodostuu kuudesta kolmen alkion permutaatiosta: $S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

   Toisaalta tiedämme, että ryhmä $PGL_2(2)$ on isomorfinen ryhmän $GL_2(2)$ kanssa ja siinä on $(2^2 - 1)(2^2 - 2) = 6$ alkiota. Projektiivinen avaruus $P(\mathbb{F}_2^2)$ taas muodostuu kolmesta alkiosta $\langle (1,0) \rangle$, $\langle (0,1) \rangle$ ja $\langle (1,1) \rangle$. Edellisen tehtävän perusteella tiedämme, että jokainen ryhmän $PGL_2(2)$ alkio on tämän kolmialkioisen joukon permutaatio, ja eri alkiot ovat eri permutaatioita. Tästä seuraa, että $PGL_2(2) \cong S_3$.

   Tutkitaan vielä, minkälaisia permutaatioita ryhmän $GL_2(2)$ alkiot ovat. Numeroidaan projektiivisen avaruuden pisteet siten, että

   $$1 = \langle (1,0) \rangle, \quad 2 = \langle (0,1) \rangle, \quad 3 = \langle (1,1) \rangle.$$

   Nyt ryhmän $GL_2(2)$ alkio $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ kuvaa vektoriavaruuden V vektoreita seuraavasti:

   $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Siten se vastaa projektiivisen avaruuden kuvausta $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$ eli on permutaatio (12).

Samalla tavoin voidaan tutkia, millaisia permutaatioita muut ryhmän alkiot ovat:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = (23), \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = (132), \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = (13), \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = (123).$$

4. Mitkä seuraavista bilineaarisista muodoista ovat symmetrisiä, mitkä alternoivia ja mitkä antisymmetrisiä? Mitkä niistä ovat surkastuneita? Miltä näyttävät muotojen matriisit?

   (a) $B : K^2 \times K^2 \to K$, $B(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$

   (b) $B : K^2 \times K^2 \to K$, $B(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$

   (c) $B : K^n \times K^n \to K$, $B(x, y) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$

Ratkaisu: Todetaan aluksi, että jos K:n karakteristika ei ole kaksi, niin muoto on antisymmetrinen jos ja vain jos se on alternoiva. Jos taas karakteristika on kaksi, niin muoto on antisymmetrinen jos ja vain jos se on symmetrinen. Tästä seuraa, että antisymmetrisyyttä ei tarvitse erikseen tarkastella.

Merkitään $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$, missä ykkönen on i:nnellä paikalla.

(a) Muoto B ei ole symmetrinen: esimerkiksi $B(e_1, e_2) = 1$ ja $B(e_2, e_1) = -1$. Se on alternoiva, sillä $B(x, x) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$ kaikilla $x \in V$.
Muoto B ei ole surkastunut. Jos nimittäin $v = (v_1, v_2) \in \mathrm{rad}(V)$, niin $0 = B(v, e_1) = -v_2$ ja $0 = B(v, e_2) = v_1$. Siten $v = 0$.
Muodon B matriisi on $\hat{B} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$

(b) Muoto B on symmetrinen, sillä

$$\begin{aligned}B(x, y) &= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2\\ &= y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 - y_2x_2 = B(y, x).\end{aligned}$$

Se ei ole alternoiva, sillä esimerkiksi $B(e_1, e_1) = 1$.
Muoto B on surkastunut, sillä $\mathrm{rad}(V) = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in K\}$. Jos nimittäin $x = (x_1, x_2) \in V$, niin

$$B(x, (\alpha, \alpha)) = \alpha x_1 - \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_2 = 0$$

kaikilla $\alpha \in K$. Toisaalta, jos $v = (v_1, v_2) \in \mathrm{rad}(V)$, niin $0 = B(v, e_1) = v_1 - v_2$.
Muodon B matriisi on $\hat{B} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$

(c) Muoto B on symmetrinen, sillä $B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = B(y,x)$. Se ei ole alternoiva, sillä esimerkiksi $B(e_1,e_1) = 1$.

Muoto B ei ole surkastunut. Jos nimittäin $v \in \mathrm{rad}(V)$, niin $0 = B(v,e_i) = v_i$ kaikilla $i \in \{1,\ldots,n\}$ ja siten $v = 0$.

Muodon B matriisi on I_n.

5. Olkoon B bilineaarinen muoto.

   (a) Osoita, että B on symmetrinen jos ja vain jos sen matriisi missä tahansa kannassa kirjoitettuna on symmetrinen.

   (b) Osoita, että B on antisymmetrinen jos ja vain jos sen matriisi missä tahansa kannassa kirjoitettuna on antisymmetrinen.

   (c) Osoita, että jos B on alternoiva, niin sitä vastaavan matriisin diagonaalialkiot ovat nollia. Osoita, että jos jonkin matriisin diagonaalialkiot ovat nollia, niin se ei välttämättä ole alternoivan muodon matriisi.

Ratkaisu:

(a) Olkoon $(v_1,\ldots,v_n)$ jokin V:n kanta. Oletetaan ensin, että B on symmetrinen. Nyt $\hat{B}(i,j) = B(v_i,v_j) = B(v_j,v_i) = \hat{B}(j,i)$ kaikilla i,j, joten matriisi $\hat{B}$ on symmetrinen.

Oletetaan sitten, että matriisi $\hat{B}$ kirjoitettuna kannan $(v_1,\ldots,v_n)$ suhteen on symmetrinen ja B on sitä vastaava lineaarinen muoto. Olkoot $v = \sum_i \alpha_i v_i \in V$ ja $w = \sum_j \beta_j v_j \in V$. Nyt

$$\begin{aligned} B(v,w) &= B\left(\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \beta_j v_j\right) = \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j B(v_i,v_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j \hat{B}(i,j) = \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j \hat{B}(j,i) \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j B(v_j,v_i) = B\left(\sum_j \beta_j v_j, \sum_i \alpha_i v_i\right) \\ &= B(w,v), \end{aligned}$$

joten B on symmetrinen.

(b) Todistus on samanlainen kuin kohdassa (a).

(c) Olkoon $(v_1,\ldots,v_n)$ jokin V:n kanta. Nyt $\hat{B}(i,i) = B(v_i,v_i) = 0$ kaikilla i, joten matriisin $\hat{B}$ diagonaalialkiot ovat kaikki nollia.

Jos bilineaarinen muoto on alternoiva, niin sen on oltava antisymmetrinen. Voidaan siis valita matriisi, jonka diagonaalialkiot ovat nollia, mutta joka ei ole antisymmetrinen. Tällainen matriisi ei voi olla alternoivan bilineaarisen muodon matriisi.

Esimerkiksi matriisia $\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ vastaava $\mathbb{R}^2$:n muoto B ei ole alternoiva, sillä $B((1,1),(1,1)) = 3$.

6. (a) Olkoon $\alpha \in K^*$. Osoita, että bilineaaristen muotojen B ja αB isometriaryhmät ovat samat. (Muodolla αB tarkoitetaan kuvausta $(x, y) \mapsto \alpha B(x, y)$.) Muodon skaalaaminen eli kertominen skalaarilla ei siis vaikuta isometriaryhmään.

   (b) Olkoon B avaruuden V symmetrinen muoto, jolle ei päde $B(v, w) = 0$ kaikilla $v, w \in V$. Osoita, että on olemassa sellainen $v \in V$, että $B(v, v) \neq 0$.

Ratkaisu:

(a) Olkoon $\alpha \in K^*$, ja olkoon B bilineaarinen muoto. Osoitetaan aluksi, että myös $B' = \alpha B$ on bilineaarinen muoto. Olkoot $v, w, x, y \in V$ ja $\lambda \in K$. Nyt

$$\begin{aligned} B'(\lambda v + w, x) &= \alpha B(\lambda v + w, x) = \alpha(\lambda B(v, x) + B(w, x)) \\ &= \lambda \alpha B(v, x) + \alpha B(w, x) = \lambda B'(v, x) + B'(w, x) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} B'(v, \lambda x + y) &= \alpha B(v, \lambda x + y) = \alpha(\lambda B(v, x) + B(v, y)) \\ &= \lambda \alpha B(v, x) + \alpha B(v, y) = \lambda B'(v, x) + B'(v, y). \end{aligned}$$

Siten B' on bilineaarinen.

Osoitetaan sitten, että B:n ja B':n isometriaryhmät ovat samat. Olkoon g B:n isometria. Nyt $B'(gv, gw) = \alpha B(gv, gw) = \alpha B(v, w) = B'(v, w)$. Siten g on myös B':n isometria. Tästä seuraa, että jos g on B':n isometria, niin se on myös bilineaarisen muodon $\alpha^{-1} B' = B$ isometria. Siten väite on todistettu.

(b) Huomaa, että tässä tehtävässä on oletettava, että kunnan karakteristika ei ole kaksi!

Olkoot $v, w \in V$ sellaisia, että $B(v, w) \neq 0$. Jos $B(v, v) \neq 0$ tai $B(w, w) \neq 0$, niin väite on todistettu. Voimme siis olettaa, että $B(v, v) = 0$ ja $B(w, w) = 0$. Nyt

$$B(v + w, v + w) = B(v, v) + 2B(v, w) + B(w, w) = 2B(v, w) \neq 0.$$