Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 1, ratkaisuehdotus

Näissä harjoituksissa kaikkien vektoriavaruuksien kerroin- eli skalaarikuntana on $\mathbb{R}$, ja kaikki vektorit ajatellaan sarakevektoreina.

1. Tutki, ovatko seuraavat kuvaukset lineaarisia? Myönteisissä tapauksissa etsi kuvausta vastaava matriisi A, jolle pätee $L(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.
   (a) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (x + 2y - z, z - x)$.
   (b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.
   (c) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(\mathbf{v})$ saadaan kiertämällä vektoria $\mathbf{v}$ origon ympäri vastapäivään 45 astetta (eli $\pi/4$ radiaania).
   (d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\mathbf{v})$ saadaan peilaamalla vektori $\mathbf{v}$ x-akselin suhteen ja siirtämällä sitä sen jälkeen 3 yksikköä positiivisen y-akselin suuntaan.
   (e) $L = L_c \circ L_a$, missä L_a on (a)-kohdan kuvaus ja L_c (c)-kohdan kuvaus.

Ratkaisu. **(a)** Tarkistetaan lineaarisuusehdot:

$$\begin{aligned}
L\big((x, y, z) + (x', y', z')\big) &= L(x + x', y + y', z + z') \\
&= \big((x + x') + 2(y + y') - (z + z'), (z + z') - (x + x')\big) \\
&= \big((x + 2y - z) + (x' + 2y' - z'), (z - x) + (z' - x')\big) \\
&= (x + 2y - z, z - x) + (x' + 2y' - z', z' - x') \\
&= L(x, y, z) + L(x' + y' + z'),
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
L\big(\alpha(x, y, z)\big) &= L(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + 2\alpha y - \alpha z, \alpha z - \alpha x) \\
&= \alpha(x + 2y - z, z - x) = \alpha L(x, y, z).
\end{aligned}$$

Lineaarikuvauksen matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mikä on helppo tarkistaa kokeilemalla.

(b) Kuvaus ei ole lineaarinen. Esimerkiksi

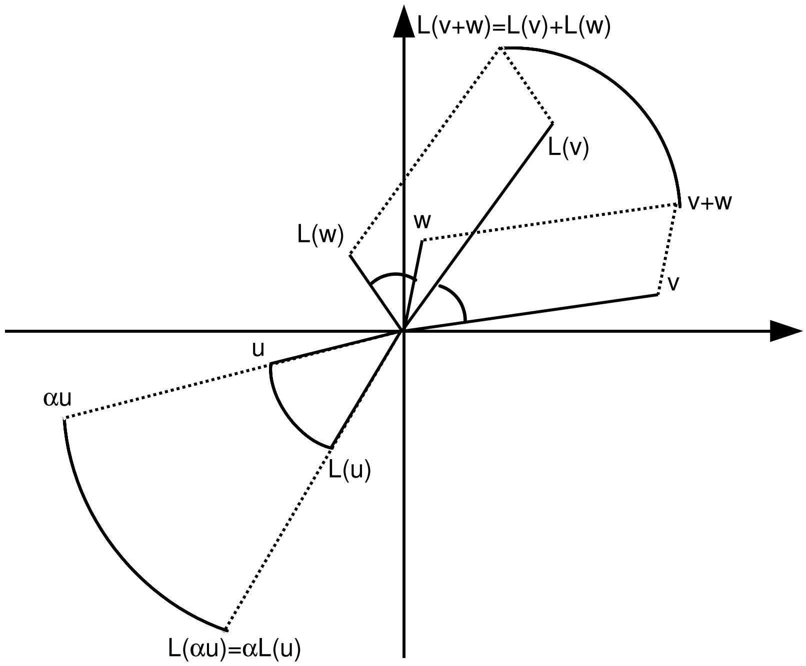
$$L(1, 0) = (1, 0) \quad \text{ja} \quad L(1, \pi/2) = (0, 1),$$

mutta

$$L((1, 0) + (1, \pi/2)) = L(2, \pi/2) = (0, 2) \neq (1, 0) + (0, 1).$$

(c) Kierrot origon ympäri ovat lineaarisia kuvauksia. Tämän voi todeta kuvasta helpolla geometrisella tarkastelulla. Lineaarikuvauksen matriisi saadaan tässä tapauksessa esimerkiksi tarkastelemalla kantavektorien $(1,0)$ ja $(0,1)$ kuvia. (Näissä harjoituksisa käytetään avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollista kantaa, jos muuta ei sanota.) Pythagoraan lauseen avulla nähdään, että $L(1,0) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ja $L(0,1) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Nämä vektorit muodostavat vaaditun matriisin sarakkeet:

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$



(d) Kuvaus ei ole lineaarinen. Tässä tapauksessa asia voidaan todeta helposti tarkastelemalla origon (nollavektorin) kuvaa. Lineaarikuvauksissa nimittäin täytyy päteä

$$L(\mathbf{0}) = L(\mathbf{0} - \mathbf{0}) = L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Kuitenkin $L(0,0,0) = (0,3,0)$.

(e) Kahdesta lineaarikuvauksesta yhdistetty kuvaus on lineaarinen. Tämä todistetaan tehtävässä 5. Yhdistettyä kuvausta vastaava matriisi on kuvausten matriisien tulo:

$$A_e = A_c A_a = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Laske seuraavien matriisien determinantit.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = BC, \quad E = B + C.$$

Ratkaisu. Diagonaali- ja kolmiomatriisien determinantit lasketaan kertomalla keskenään diagonaalialkiot. Näin $\det(A) = 6$ ja $\det(B) = acfj$.

Kun matriisissa C vaihdetaan ensin toinen ja kolmas rivi keskenään ja sen jälkeen kolmas ja neljäs rivi, saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

jonka determinantti on -1. Koska tehtiin kaksi vaihtoa, alkuperäisen matriisin determinantti oli $\det(C) = (-1)^2 \cdot (-1) = -1$.

Matriisin D determinantti saadaan determinanttifunktion homomorfiaominaisuutta käyttämällä: $\det(D) = \det(BC) = \det(B)\det(C) = -acfj$. Sen sijaan matriisin E determinantti on laskettava käsin. Kehittämällä ensimmäisen rivin suhteen saadaan

$$\det(E) = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & -1 \\ d & e-1 & f & 0 \\ g & h & i-1 & j+1 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} c & 0 & -1 \\ e-1 & f & 0 \\ h & i-1 & j+1 \end{vmatrix}.$$

Pienempi determinantti voidaan jälleen laskea kehittämällä ensimmäisen rivin suhteen, jolloin lopulta

$$\begin{vmatrix} c & 0 & -1 \\ e-1 & f & 0 \\ h & i-1 & j+1 \end{vmatrix} = cf(j+1) - 0 + (-1)[(e-i)(i-1) - fh].$$

Matriisin E determinantiksi saadaan siis

$$(a+1)[cf(j+1) - ((e-i)(i-1) - fh)].$$

3. Palauta mieleen *jäännösluokkarenkaat* $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$, joissa

$$[a] = [b], \quad \text{joss } a - b \text{ on jaollinen luvulla } n.$$

Yhteenlasku määritellään $[a] + [b] = [a+b]$ ja kertolasku $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$. (Nämä renkaat saadaan $\mathbb{Z}$:n tekijärenkaina ideaalin $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ suhteen.) Tarkista seuraavat väitteet:

(a) $\mathbb{Z}_7$ on kunta. (Tämä pätee renkaalla $\mathbb{Z}_p$ joss p on alkuluku.)

(b) Joukko $\mathbb{Z}_7 \setminus \{[0]\}$ on kertolaskun suhteen syklinen ryhmä. (Tämäkin pätee kaikilla alkuluvuilla, mutta on huomattavasti vaikeampi osoittaa.)

Ratkaisu. **(a)** Ensimmäiseksi huomataan, että yhteen- sekä kertolasku ovat molemmat vaihdannaisia ja liitännäisiä sekä toteuttavat osittelulain. On myös helppo nähdä, että $(\mathbb{Z}_7, +)$ on ryhmä: neutraalialkio on $[0]$ ja alkion $[n]$ vasta-alkio $[-n] = [7-n]$. Myös kertolaskulla on neutraalialkio $[1]$. Jäljelle jää siis tarkastella, onko joukossa $\mathbb{Z}_7 \setminus \{[0]\}$ jokaisella alkiolla käänteisalkio kertolaskun suhteen. Tehdään tämä laskemalla kertotaulu:

$\cdot$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	1	2	3	4	5	6
[2]	2	4	6	1	3	5
[3]	3	6	2	5	1	4
[4]	4	1	5	2	6	3
[5]	5	3	1	6	4	2
[6]	6	5	4	3	2	1

Koska jokaisella rivillä esiintyy neutraalialkio $[1]$, on yhtälöllä $[a] \cdot [x] = 1$ ratkaisu kaikilla a, ja $[x]$ on tällöin alkion $[a]$ käänteisalkio.

Lisätieto. Käänteisalkiot löytyvät joukossa $\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}$ joss p on alkuluku. Tämä nähdään seuraavasti. Olkoon $[a] \in \mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}$. Nyt $[b]$ on $[a]$:n käänteisalkio jos ja vain jos

$$\begin{aligned}[a][b] = [1] &\iff [ab] = [1] \iff p \text{ jakaa luvun } ab-1 \\ &\iff ab - 1 = pk \text{ jollain } k \in \mathbb{Z} \iff ab - pk = 1 \text{ jollain } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Lukuteorian perusteista muistetaan, että yhtälöllä $ab - pk = 1$ on kokonaislukuratkaisuja (b, k) täsmälleen silloin kun $\mathrm{syt}(a, p) = 1$. Toisaalta tämä pätee kaikilla $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ jos ja vain jos p on alkuluku.

(b) Lasketusta kertotaulusta nähdään, että

$$3^2 = 2,\ 3^3 = 3 \cdot 2 = 6,\ 3^4 = 3 \cdot 6 = 4,\ 3^5 = 3 \cdot 4 = 5 \text{ ja } 3^6 = 3 \cdot 5 = 1.$$

Kaikki kertolaskuryhmän alkiot saadaan siis alkion $[3]$ potensseina, joten kertolaskuryhmä on syklinen.

4. Olkoon V vektoriavaruus. Tarkastellaan joukkoa

$$GL(V) = \{L : V \to V \mid L \text{ on kääntyvä lineaarikuvaus}\}.$$

(a) Osoita, että $GL(V)$ on ryhmä, laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen.

(b) Merkitään $SL(V) = \{L : V \to V \mid \det L = 1\}$. Osoita, että $SL(V)$ on ryhmän $GL(V)$ aliryhmä.

Todistus. **(a)** Kaikilla kuvauksilla pätee liitännäisyyslaki $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, joten sitä ei tarvitse erikseen todistaa. Lisäksi identtinen kuvaus $I : x \mapsto x$ on kääntyvä ja selvästi lineaarinen, joten se on ryhmän $GL(V)$ neutraalialkio (tunnetusti $I \circ f = f \circ I = f$ kaikilla kuvauksilla f).

Tarkistetaan ensin, että kahden kääntyvän lineaarikuvauksen L_1 ja L_2 yhdistelmä on kääntyvä lineaarikuvaus. Olkoot v ja w vektoreita ja α jokin skalaari. Nyt

$$L_1(L_2(v+w)) \overset{L_2 \text{ lin.}}{=} L_1(L_2(v) + L_2(w)) \overset{L_1 \text{ lin.}}{=} L_1(L_2(v)) + L_1(L_2(w)),$$

ja

$$L_1(L_2(\alpha v)) = L_1(\alpha L_2(v)) = \alpha L_1(L_2(v)).$$

Siispä $L_1 \circ L_2$ on lineaarinen. Se on kääntyvä, koska kahden kääntyvän kuvauksen yhdistelmä on aina kääntyvä, käänteiskuvauksena $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Tarkistetaan vielä, että joukko $GL(V)$ sisältää kaikkien alkioidensa käänteisalkiot, eli että mielivaltaisen kuvauksen $L \in GL(V)$ käänteiskuvaus on myös lineaarinen ja kääntyvä. Olkoot jälleen v ja w vektoreita ja α jokin skalaari, jolloin

$$\begin{aligned} L^{-1}(v+w) &= L^{-1}\big(\underbrace{(L \circ L^{-1})(v)}_{v} + \underbrace{(L \circ L^{-1})(w)}_{w}\big) \\ &\overset{L \text{ lin.}}{=} (L^{-1} \circ L)(L^{-1}(v) + L^{-1}(w)) = L^{-1}(v) + L^{-1}(w), \end{aligned}$$

ja

$$L^{-1}(\alpha v) = L^{-1}\big(\alpha (L \circ L^{-1})(v)\big) = (L^{-1} \circ L)(\alpha L^{-1}(v)) = \alpha L^{-1}(v).$$

Koska lisäksi L^{-1} on kääntyvä (käänteiskuvaus L), niin $L^{-1} \in GL(V)$.

(b) Jos determinantti on nollasta poikkeava, kuvaus on kääntyvä. Täten $SL(V) \subset GL(V)$. (Itse asiassa tehtävässä jäi mainitsematta, että joukon $SL(V)$ alkioiden pitää olla lineaarikuvauksia; muutenhan determinanttikaan ei olisi määritelty.)

On tarkistettava, että kaikkien joukon $SL(V)$ alkioiden tulot ja käänteisalkiot kuuluvat joukkoon $SL(V)$, ja lisäksi että neutraalialkio $I \in SL(V)$. Determinanttien laskusäännöistä nähdään, että jos $L_1, L_2 \in SL(V)$, niin

$$\det(L_1 \circ L_2) = \det(L_1) \cdot \det(L_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

ja

$$\det(L_1^{-1}) = \frac{1}{\det(L_1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Näin ollen $L_1 \circ L_2 \in SL(V)$ ja $L_1^{-1} \in SL(V)$. Lisäksi kuvauksen I matriisi on (missä tahansa kannassa) yksikkömatriisi I_n, jonka determinantti on $1^n = 1$. $\square$

5. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia, kantoinaan $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ja $T = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$. Olkoon f kuvaus, jolle pätee

$$f(v_i) = a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{im}w_m \quad \text{kaikilla } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus L, jolle $L(v_i) = f(v_i)$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. (Eli lineaarikuvaus on täysin määrätty, kun sen arvot kantavektoreilla tunnetaan.) Mikä on L:n matriisiesitys kantojen S ja T suhteen?

Todistus. Tehtävän pääajatus on tarkistaa, että on olemassa täsmälleen yksi lineaarikuvaus, joka saa tietyt arvot kantavektoreilla. Tätä tarvitaan mm. siinä, kun kirjoitetaan lineaarikuvauksen matriisi jonkin kannan suhteen asettamalla sarakkeiksi kuvauksen saamat arvot kantavektoreilla. Jos kaksi eri kuvausta voisi saada samat arvot kantavektoreilla, sama matriisi edustaisi näitä molempia kuvauksia, mikä ei ole toivottavaa.

Olemassaolo. Määritellään kuvaus L seuraavasti: Olkoon $x \in V$. Vektorilla x on yksikäsitteinen esitys $\sum_i x_i v_i$ kantavektorien lineaarikombinaationa. Asetetaan nyt

$$L(x) = L\left(\sum_i x_i v_i\right) = \sum_i x_i f(v_i).$$

Osoitetaan, että näin määritelty kuvaus on lineaarinen. Olkoot sitä varten x ja y kaksi vektoria, joiden esitykset kannan S suhteen ovat $\sum_i x_i v_i$ ja $\sum_i y_i v_i$, sekä α jokin skalaari. Nyt

$$\begin{aligned}
L(x+y) &= L\left(\sum_i x_i v_i + \sum_i y_i v_i\right) = L\left(\sum_i (x_i + y_1) v_i\right) \\
&\overset{L\text{:n määr.}}{=} \sum_i (x_i + y_1) f(v_i) = \sum_i x_i f(v_i) + \sum_i y_i f(v_i) \\
&\overset{L\text{:n määr.}}{=} L\left(\sum_i x_i v_i\right) + L\left(\sum_i y_i v_i\right) = L(x) + L(y),
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
L(\alpha x) &= L\left(\alpha \sum_i x_i v_i\right) = L\left(\sum_i \alpha x_i v_i\right) = \sum_i \alpha x_i f(v_i) \\
&= \alpha \sum_i x_i f(v_i) = \alpha L\left(\sum_i x_i v_i\right) = \alpha L(x).
\end{aligned}$$

Siispä L on lineaarinen.

Yksikäsitteisyys. Oletetaan, että L ja L' ovat molemmat lineaarikuvauksia, jotka toteuttavat ehdon $L(v_i) = L'(v_i) = f(v_i)$ kaikilla kantavektoreilla v_i. Osoitetaan, että näiden on oltava samat tutkimalla niiden arvoja mielivaltaisella vektorilla $x \in V$:

$$\begin{aligned} L(x) - L'(x) &= L\left(\sum_i x_i v_i\right) - L'\left(\sum_i x_i v_i\right) \\ &\overset{\text{lin.}}{=} \sum_i x_i L(v_i) - \sum_i x_i L'(v_i) = \sum_i x_i f(v_i) - \sum_i x_i f(v_i) = 0. \end{aligned}$$

Koska $L(x) - L'(x) = 0$ kaikilla vektoreilla x, niin $L = L'$. □

Lineaarikuvauksen L matriisi muodostetaan asettamalla sarakkeiksi kantavektorien arvot maaliavaruuden kannassa kirjoitettuina:

$$\hat{L}_{ST} = [\widehat{L(v_1)_T} \ \cdots \ \widehat{L(v_n)_T}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

6. Osoita, että jos kahden äärellisulotteisen (reaalikertoimisen) vektoriavaruuden dimensiot ovat samat, ne ovat isomorfiset. (Eli niiden välille voidaan määritellä kääntyvä lineaarikuvaus.)

Todistus. Olkoot V ja W kaksi n-ulotteista vektoriavaruutta, joilla on kannat $S = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $T = (w_1, \ldots, w_n)$. Määritellään kuvaukset $f : S \to W$, $f(v_i) = w_i$ ja $g : T \to V$, $g(w_i) = v_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. (Tässä käytetään sitä, että avaruuksien dimensiot ovat samat.) Edellisen tehtävän perusteella on olemassa yksikäsitteiset lineaarikuvaukset L ja M, joille pätee $L(v_i) = f(v_i) = w_i$ ja $M(w_i) = g(w_i) = v_i$ kaikilla kantavektoreilla v_i ja w_i.

Olkoot $x = \sum_i x_i v_i \in V$ ja $y = \sum_i y_i w_i \in W$. Lineaarisuudesta seuraa nyt

$$\begin{aligned} (M \circ L)(x) &= M\left(L\left(\sum_i x_i v_i\right)\right) = M\left(\sum_i x_i L(v_i)\right) \\ &= M\left(\sum_i x_i w_i\right) = \sum_i x_i M(w_i) = \sum_i x_i v_i = x, \end{aligned}$$

ja vastaavasti $(L \circ M)(y) = y$. Täten L ja M ovat toistensa käänteiskuvauksia, eli molemmat ovat lineaarisia isomorfismeja. □