Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 5
ma 8.6.2009

1. (a) Osoita, että kunnissa $\mathbb{F}_p$, missä $p$ on alkuluku, ja rationaalilukujen kunnassa $\mathbb{Q}$ ei ole mahdollista määritellä konjugaatioautomorfismia $\sigma(a) = \bar{a}$.

   (b) Osoita, että kunnassa

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

   voidaan määritellä konjugaatioautomorfismi. (Tarkista ensin, että $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ on kunta, ellet ole sitä aiemmin tehnyt.) Minkälainen on normikuvaus $N(a) = a\bar{a}$?

2. Osoita, että $U(V)/SU(V) \cong \operatorname{Ker} N$, missä $N$ on normikuvaus $\lambda \mapsto \lambda\bar{\lambda}$.

   *Vihje.* Käytä homomorfialausetta.

3. Muodosta kunta $\mathbb{F}_4$ samaan tapaan kuin esimerkissä 6.13; aloita etsimällä juureton $\mathbb{F}_2$-kertoiminen toisen asteen polynomi $g$. Muodosta tekijästruktuuri, jossa samastetaan ne polynomit $f_1$ ja $f_2$, joilla pätee $f_1 - f_2 = hg$ jollain polynomilla $h$. Kirjoita kunnan alkioiden yhteenlasku- ja kertotaulut.

   Minkälainen on konjugoiva automorfismi kunnassa $\mathbb{F}_4$? Käyttäen hermiittistä muotoa $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ selvitä vektoriavaruuden $\mathbb{F}_4^2$ kaikkien vektorien arvot neliömuodossa $Q(v) = S(v, v)$.

4. Olkoon $(u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m)$ symplektinen kanta $K$-kertoimisessa avaruudessa. Järjestetään kantavektorit uudelleen, jotta saadaan kanta $S = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m)$. Osoita, että tämän kannan suhteen kirjoitettuna matriisi

$$g = \begin{bmatrix} A & 0_m \\ 0_m & (A^\top)^{-1} \end{bmatrix}$$

   esittää symplektistä kuvausta kaikilla $A \in GL_m(K)$. Päättele tästä, että ryhmällä $Sp_{2m}(K)$ on aliryhmä, joka on isomorfinen ryhmän $GL_m(K)$ kanssa.

5. Olkoon $V$ jokin $K$-kertoiminen vektoriavaruus, ja olkoon $u \in V \setminus \{0\}$. Osoita, että symplektisistä transvektioista koostuva joukko

$$T_u = \{\tau_{u,a} \mid a \in K\}$$

on ryhmä, ja sellaisena isomorfinen kunnan $K$ additiivisen ryhmän kanssa. Päättele tästä, että ryhmällä $Sp(V)$ on aliryhmänä $(K,+)$.

6. (a) Olkoon $K$ kunta. Osoita, että $Sp_2(K) = SL_2(K)$.

   (b) Tarkastellaan ryhmää $U(n) = U_n(\mathbb{C})$, muotona hermiittinen pistetulo. Osoita, että on olemassa bilineaariset muodot $A$ ja $B$, joille pätee $U(n) \cong O_{2n}^{(A)}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2n}^{(B)}(\mathbb{R})$.