

Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 4
to 4.6.2009

Huom. Tehtävissä 1–5 oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka kerroinkunnan karakteristika ei ole 2.

1. Merkitään skalaarimatriisien joukkoa kirjaimella Z . Projektiivinen ortogonaalinen ryhmä ja projektiivinen erityinen ortogonaalinen ryhmä määritellään seuraavasti:

$$PO(V) = O(V)/(Z \cap O(V)) \quad \text{ja} \quad PSO(V) = SO(V)/(Z \cap O(V)).$$

Osoita, että $|Z \cap O_n(\mathbb{R})| = 2$ ja että $PSO_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$ jos ja vain jos n on pariton. Muotona on tavallinen pistetulo ($B(x, x) = x \cdot x$).

2. Oletetaan, että avaruudella K^3 on kanta $S = (v_1, \dots, v_3)$, jossa eräällä symmetrisellä muodolla on matriisi

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Etsi kanta T , jossa kyseistä muotoa vastaa diagonaalimatriisi \hat{B}_2 . Oleta sitten, että kerroinkuntana on \mathbb{R} , ja etsi kanta U , jossa muodon matriisi \hat{B}_3 on edelleen diagonaalinen, mutta diagonaalialkiot ovat ± 1 tai 0 .

Ajatellaan nyt, että matriisit \hat{B}_1 ja \hat{B}_3 onkin annettu samassa kannassa, jossa ne siis vastaavat ekvivalentteja muotoja B_1 ja B_3 . Etsi konjugoiva matriisi $T \in GL_n(\mathbb{R})$, jolla $T^{-1}B_1T = B_3$.

3. Osoita, että seuraavat kuvaukset ovat ortogonaalisia hyperbolisessa tasossa \mathbb{R}^2 :

$$g = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ -4/3 & -5/3 \end{bmatrix},$$
$$h = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \quad \text{kaikilla } \varphi.$$

4. Myoneja syntyy ilmakehässä noin 15 km korkeudessa kosmisten säteiden vaikutuksesta. Niiden elinaika on keskimäärin 2,2 mikrosekuntia. Eräs havaitsija kuitenkin näki tällaisen myonin saavuttavan maanpinnan 9,5 mikrosekunnin kuluttua sen syntymästä. Olettaen, että myoni liikkui tasaisella nopeudella suoraan alaspäin, laske sen taivaltama matka sen omassa koordinaatistossa käyttäen hyväksi sitä tietoa, että koordinaatistonmuunnos säilyttää Minkowskin avaruuden geometrian.
5. Tutki avaruutta \mathbb{F}_5^2 varustettuna bilineaarisella muodolla

$$B(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 \quad (\text{pistetulo}).$$

Mitkä vektorit ovat isotrooppisia? Etsi kanta, jossa muodon matriisi on jompaa kumpaa lauseen 7.24 mainitsemaa perustyyppiä.

Määritä ryhmien $O_2^{(B)}(5)$ ja $SO_2^{(B)}(5)$ alkiot ja niiden kertaluvut. Ovatko nämä isomorfisia joidenkin tuttujen ryhmien kanssa?

6. Olkoon K kunta, jonka karakteristika on 2.
- (a) Tarkastellaan kuvausta $Q : K^4 \rightarrow K$, missä $Q(v) = v_1v_3 + v_2v_4$. Osoita, että Q on neliömuoto, ja kirjoita vastaavan bilineaarisen muodon matriisi.
- (b) Osoita, että jos Q on avaruuden K^n neliömuoto, niin sitä vastaava bilineaarinen muoto on alternoiva ja symmetrinen.