

Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 3
ma 1.6.2009

Näissä harjoituksissa V on K -kertoiminen n -ulotteinen vektoriavaruus.

1. Määritellään joukot T , B ja U seuraavasti:

- (a) $T = \{g \in GL_n(K) \mid g \text{ on diagonaalimatriisi}\}$
- (b) $B = \{g \in GL_n(K) \mid g \text{ on yläkolmiomatriisi}\}$
- (c) $U = \{g \in B \mid g\text{:n diagonaalialkiot ovat ykkösiä}\}.$

Osoita, että joukot T , B ja U ovat ryhmän $GL_n(K)$ aliryhmiä. Osoita, että $B = TU$, eli että jokainen B :n alkio voidaan ilmaista T :n ja U :n alkion tulona.

2. Osoita, että ryhmän $PGL(V)$ eri alkiot ovat aina erilaisia projektiivisen avaruuden $\mathbb{P}(V)$ kuvauksia.

3. Osoita, että ryhmä $PGL_2(2)$ on isomorfinen ryhmän S_3 kanssa, missä S_3 on symmetrinen ryhmä eli kolmen alkion permutaatioiden ryhmä. Voit osoittaa isomorfisuuden esimerkiksi tarkastelemalla sitä, miten $PGL_2(2)$ kuvaa projektiivisen suoran $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^2)$ pisteitä

4. Mitkä seuraavista bilineaarisista muodoista ovat symmetrisiä, mitkä alternoivia ja mitkä antisymmetrisiä? Mitkä niistä ovat surkastuneita? Miltä näyttävät muotojen matriisit?

- (a) $B : K^2 \times K^2 \rightarrow K, B(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$
- (b) $B : K^2 \times K^2 \rightarrow K, B(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$
- (c) $B : K^n \times K^n \rightarrow K, B(x, y) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$

5. Olkoon B bilineaarinen muoto.

- (a) Osoita, että B on symmetrinen jos ja vain jos sen matriisi missä tahansa kannassa kirjoitettuna on symmetrinen.
- (b) Osoita, että B on antisymmetrinen jos ja vain jos sen matriisi missä tahansa kannassa kirjoitettuna on antisymmetrinen.
- (c) Osoita, että jos B on alternoiva, niin sitä vastaavan matriisin diagonaalialkiot ovat nollia. Osoita, että jos jonkin matriisin diagonaalialkiot ovat nollia, niin se ei välttämättä ole alternoivan muodon matriisi.

6. (a) Olkoon $\alpha \in K^*$. Osoita, että bilineaaristen muotojen B ja αB isometriaryhmät ovat samat. (Muodolla αB tarkoitetaan kuvausta $(x, y) \mapsto \alpha B(x, y)$.) Muodon skaalaaminen eli kertominen skalaarilla ei siis vaikuta isometriaryhmään.
- (b) Olkoon B avaruuden V symmetrinen muoto, jolle ei päde $B(v, w) = 0$ kaikilla $v, w \in V$. Osoita, että on olemassa sellainen $v \in V$ että $B(v, v) \neq 0$.